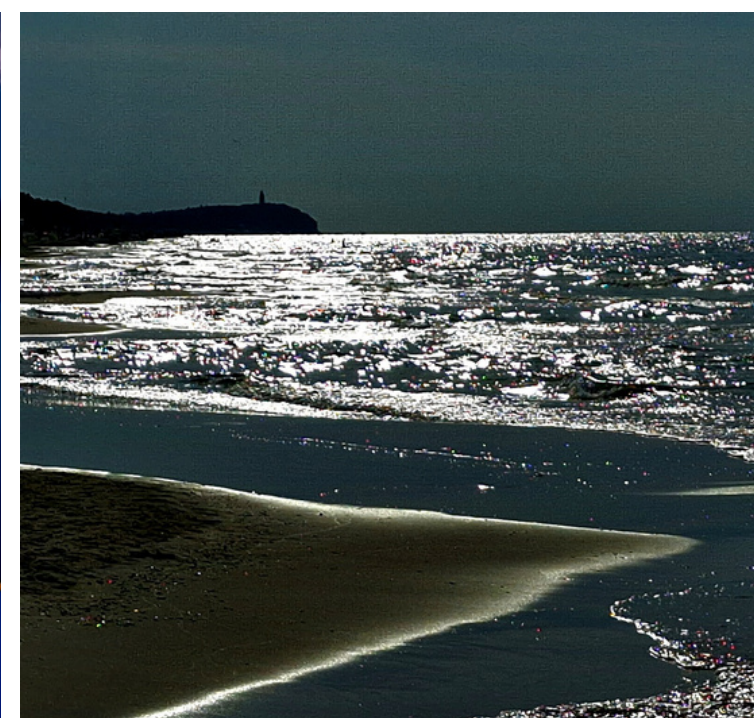
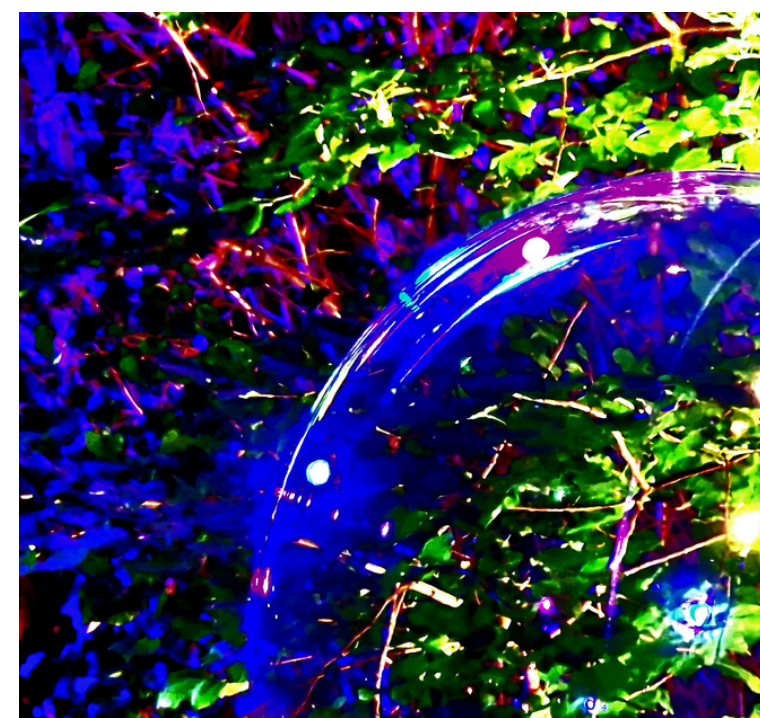




Math&Art. Patrz, to matematyka

Małgorzata Makiewicz



Math & Art. Patrz, to matematyka.
Małgorzata Makiewicz

Recenzenci:
prof. dr hab. Urszula Szuścik
dr hab. Maciej Tanaś, prof. APS

© Copyright Małgorzata Makiewicz

ISBN 978-83-66055-39-1

DOI 10.34916/ma.p-tm.pl.01

Małgorzata Makiewicz ORCID: 0000-0003-3120-2839

Wydawca: Wydawnictwo Naukowe STUDIO NOA, Wydanie I, Katowice 2023

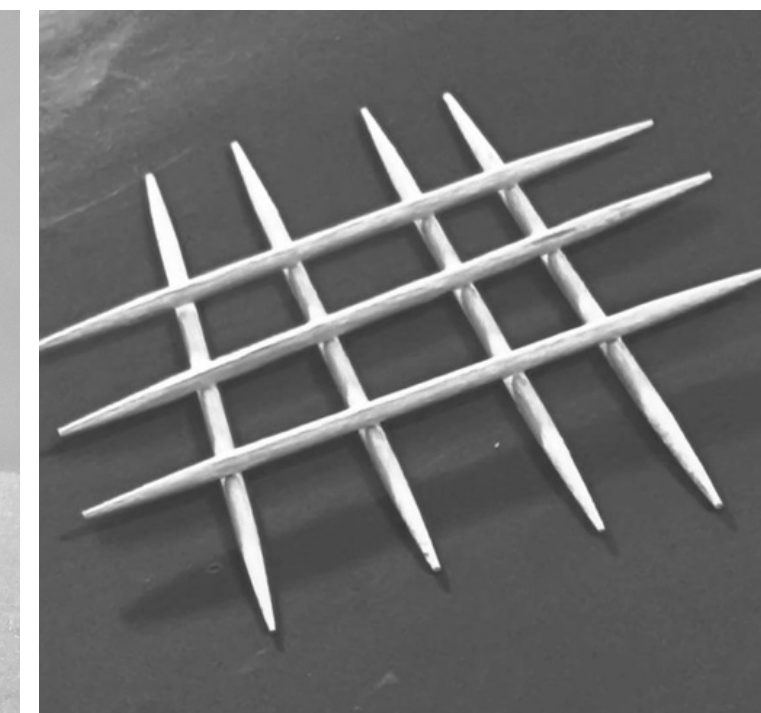
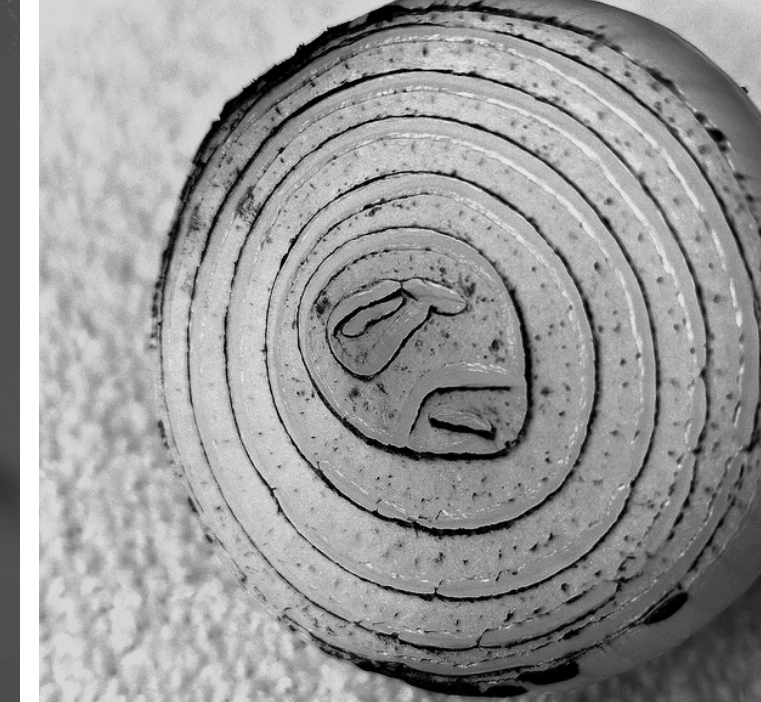
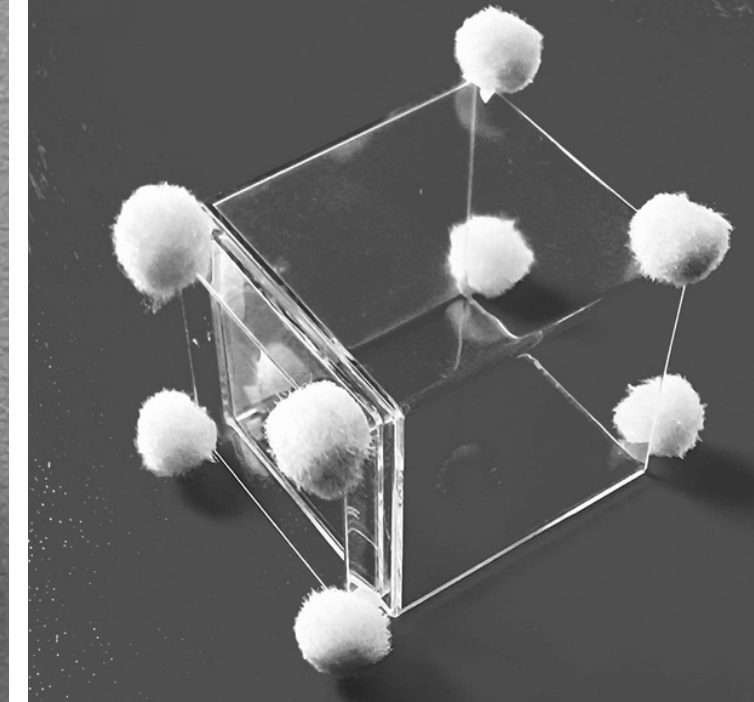
Opracowanie graficzne: Małgorzata Makiewicz, Agnieszka Urbaniak

W książce wykorzystano fotografie autorstwa Małgorzaty Makiewicz (225 szt.), Agnieszki Urbaniak (4 szt.) i Moniki Orczyk (22 szt.) oraz grafikę autorstwa Piotra Makiewicza.



**Ministerstwo
Edukacji i Nauki**

Publikację dofinansowało Ministerstwo Edukacji i Nauki w ramach Programu Wsparcia Edukacji. Projekt MEiN/2023/DPI/2972 „Math&Art. Patrz, to matematyka”.
Beneficjentem jest Fundacja Mozaika.





Spis treści

CZĘŚĆ I (dla dla nauczycieli, wychowawców, rodziców i opiekunów dzieci w wieku przedszkolnym)

Wstęp 4

Liczenie przedszkolaka 7

Orientacja przestrzenna przedszkolaka 17

Wstęp do geometrii przedszkolaka 25

Zakończenie 34

Bibliografia 36

CZĘŚĆ II (dla przedszkolaka) strony 40 - 77

Rekomendacje 78

Wstęp

Książka jest kolejną publikacją z serii Math&Art przygotowaną w konwencji alfabetyzacji wizualnej. Głównym sposobem zainteresowania dziecka matematyką jest wspólna zabawa z dorosłym i z innymi dziećmi ukierunkowana na rozbudzanie zainteresowań i chęci do liczenia, mierzenia, ważenia, poznawania figur czy wnioskowania. Poprzednie książki z cyklu [1] były adresowane głównie do pedagogów zajmujących się badaniem rzeczywistości edukacyjnej oraz nauczycieli szkół podstawowych i średnich. Tym razem zwracam się do nauczycieli, wychowawców, rodziców i dziadków dzieci w wieku przedszkolnym. Elektroniczne wydanie książki umożliwiło rozszerzenie adresatów również o małych odbiorców – przedszkolaków, którzy jeszcze nie potrafią samodzielnie czytać. Część przeznaczoną dla nich można „czytać” wspólnie z dzieckiem. Zadanie osoby dorosłej to zorganizowanie przestrzeni edukacyjnej w oparciu o zarysowane na kartach pomysły w taki sposób, aby umożliwić dziecku zrozumienie istoty liczenia, rachowania, poznawania figur geometrycznych czy kształtowania orientacji przestrzennej. Ta część książki została bowiem wzbogacona fotografiami dydaktycznymi oraz nagraniami audio, które można odsłuchać w języku polskim, angielskim lub hiszpańskim.



Propozycje zawarte w publikacji mają lokować się w tzw. strefie najbliższego rozwoju dziecka, którą, za Wygotskim, rozumiem jako *dystans pomiędzy aktualnym, a potencjalnym poziomem rozwoju dziecka. Poziom aktualny stanowi rezultat przejścia zakończonych cykli rozwojowych. Poziom potencjalny określany jest przez dopiero kształtujące się funkcje psychiczne, na które wpływają nauczanie, naśladownictwo inne kontakty społeczne oraz formy aktywności własnej* [2].

Zadaniem dorosłego jest wspomaganie rozwoju indywidualnego dziecka m.in. poprzez dostosowanie propozycji zabaw i zadań do potencjalnych jego możliwości. Dlatego zamiast wytycznych i zaleceń dydaktycznych przedstawiam wybrane propozycje, których zastosowanie może przyczynić się do dobrego startu dziecka w przestrzeń matematyki.

Zawarte w książce zdjęcia mają za zadanie prowokować dziecko do dostrzegania matematycznych pojęć i prawidłowości. Stanowią również wskazówkę pedagogiczną w jaki sposób zorganizować przestrzeń edukacyjną małego dziecka we własnym domu, bez drogich środków dydaktycznych, gier czy zabawek. Kształtowanie podstaw matematycznych pojęć i podstawowych umiejętności matematycznych może być wspaniałą przygodą. Małe dziecko uczy poprzez zabawę. Wywołanie zadziwienia, zaciekawienia i sprowokowanie zadawania przez przedszkolaka pytań i formułowania przypuszczeń zaprasza dziecko do eksploracji obiektów matematycznych.

Zaproponowane w książce zabawy dotyczące poznawania figur płaskich będących cieniami lub stemplami (pieczętkami) modeli przestrzennych noszą znamiona czynności eksploracyjnych. Dziecko spostrzega zupełnie nowe obrazy będące wynikiem własnych manipulacji przedmiotami znanymi (np. gąbką kuchenną, marchewką czy cebulą). Takie czynności *angażując nowe bodźce w nowych sytuacjach, prowadzą do zaspokajania potrzeb poznawczych dziecka* [3]. Z kolei zabawy angażujące dziecięcą pomysłowość w tworzeniu nowych układów, konstrukcji lub obrazów wykonanych z samodzielnie przygotowanych stempli *odgrywają szczególnie ważną rolę w rozwoju dziecięcej wyobraźni przestrzennej*"[4]. Zachęcam opiekunów i wychowawców dzieci przedszkolnych do kreatywnego wykorzystania darów przyrody (np. kasztanów, żołędzi czy morskich muszelek), warzyw podczas przygotowywania posiłków, guzików, koralików, domowego teatru cieni.

Najlepszą zabawką poznawczą możesz mieć w zasięgu ręki: sztuce w kuchni, które możesz wykorzystać do nauki segregowania, naczynia, które ustawiono w odpowiedniej kolejności, czy buty i rękawiczki do rozpoznawania lewej i prawej strony. *Dzieci od 3 do 7 lat inicjują zabawy konstrukcyjne, które polegają na tworzeniu różnorodnych konstrukcji z elementów takich, jak: klocki, kamyki, patyki, piasek* [5]. Rzecz w tym, aby umiejętnie pokierować tą zabawą tak, aby stała się ona podstawą do kształtowania właściwych intuicji i zarysów pojęć matematycznych.



[1] „*Math & Art. Reprezentacje enaktywne w edukacji matematycznej – badania w działaniu*” / „*Math & Art. Enactive Representations in Math Education – Research in Action*” i „*Math & Art. Wizualne drogi do reprezentacji symbolicznych pojęć matematycznych / Math & Art: Visual ways to represent symbolic mathematical concepts*”.

[2] L. S. Wygotski, *Wybrane prace psychologiczne*, przeł. E. i J. Flesznerowie, PWN, Warszawa 1971, s.541

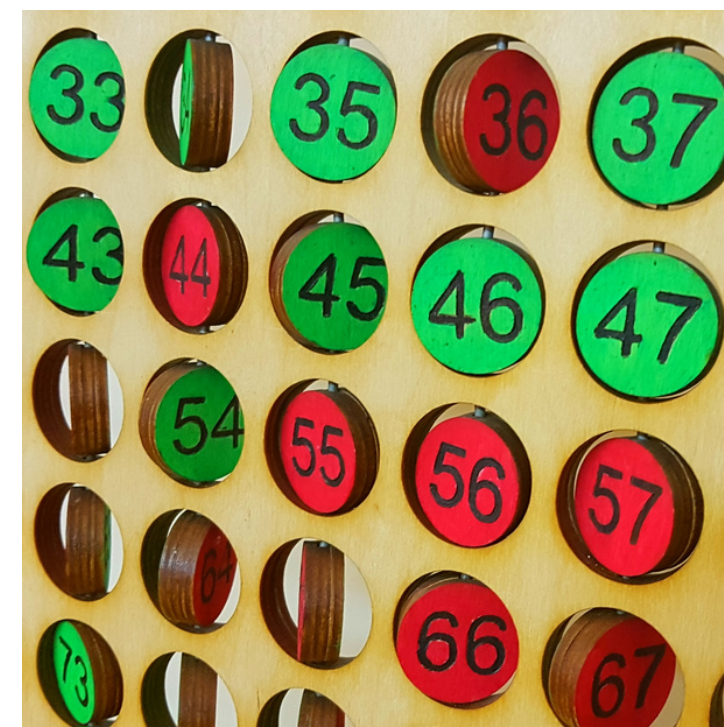
[3] M. Kielar-Turska, *Jak stymulować badawczą aktywność dziecka*, „*Wychowanie w Przedszkolu*”, nr 9/1987, s. 503.

[4] S. Szuman, *Psychologia wychowawcza wieku dziecięcego. Podręcznik dla matek i wychowawczyń w przedszkolach i domach dziecięcych oraz dla nauczycieli i studentów studiujących rozwój psychiczny dziecka*, Instytut Wydawniczy Nasza Księgarnia, Warszawa 1946, s. 83.

[5] M. Tyszkowa, *Aktywność i działalność dzieci i młodzieży*, Warszawa 1997, s. 68.

Liczenie przedszkolaka

Liczba. Abstrakcyjny obiekt matematyki, który towarzyszy nam podczas całego życia. Opisuje rozwój biologiczny, przemiany fizyczne, reakcje chemiczne, a także zmiany społeczne, miary długości, masy, objętości, prędkość i tysiące innych wielkości. Dzięki liczbom, których rozumienie przyjmuje się jako naturalne, możemy policzyć elementy zbiorów (np. mam dwie nogi, w koszyku jest pięć jabłek, samochód ma cztery koła), a także określić porządek (np. mieszkam na drugim piętrze, zająłem trzecie miejsce w wyścigu, w teatrze mam zająć ósme miejsce w drugim rzędzie). Umiejętność liczenia sprawia, że przytoczone przykłady są zrozumiałe i mają sens praktyczny.



W książce nie trzymam się, za wszelką cenę, podstawy programowej wychowania przedszkolnego obowiązującej w Polsce. Po pierwsze dlatego, że mam nadzieję że publikacja trafi do dzieci również w innych krajach, po drugie nie sądzę aby administracyjne/ formalne ograniczanie lub opóźnianie zakresu poznawania matematyki przez dziecko było właściwe. Przedszkolak zazwyczaj doskonale radzi sobie ze zrozumieniem liczb ujemnych: „mój tata zaparkował samochód parkingu w centrum handlowym na poziomie minus dwa”, „informacja słowna w windzie „poziom zero” oznacza, że jesteśmy na parterze” albo „dzisiaj temperatura spadła do minus czterech stopni, trzeba ubrać czapkę i rękawiczki bo jest zimno”. Chętnie wypowiada nazwy dużych liczb np. licząc 680 schodów podczas górskiej wycieczki na Szczeliniec (szczyt w Górach Stołowych Sudetów). Przekracza progi dziesiątek i setek, niepostrzeżenie poznając strukturę pozycyjnego układu liczenia.

Zauważmy, że w przeciwieństwie do układów addytywnych (jakim jest np. system rzymski) do zrozumienia pozycyjnego sposobu zapisu liczb konieczne jest zrozumienie podwójnej roli zera: jako liczby i znaku informującego o braku elementów danego rzędu.



Umiejętność sprawnego liczenia przez przedszkolaka stanowi podstawę do kształtowania się jego umiejętności rachowania (wykonywania działań), porządkowania, rozwiązywania zadań opartych na zależnościach i prawidłowościach liczbowych. Dobre rozumienie liczb i liczebników daje dziecku podstawę do kodowania i szyfrowania informacji. Liczbami oznaczane są kamienice i domy, każdy człowiek ma przypisany kod cyfrowy – numer PESEL, a rodzice pobierają pieniądze z bankomatu po wczytaniu karty i podaniu kodu zabezpieczającego – cyfrowego pinu. Ponadto sprawne liczenie bez ograniczania zakresu daje szansę na samodzielne spostrzeżenie prawidłowości występujących w pozycyjnych systemach liczenia. Sprawia również, że dziecko odczuwa harmonię i pewien rodzaj uporządkowania, rytmu. Opanowanie umiejętności liczenia opiera się na zrozumieniu i zastosowaniu pewnych zasad opublikowanych w latach siedemdziesiątych XX

wieku. Są one na tyle ogólne, że pozwalają zliczać wszystkie obiekty w ten sam sposób. Każdej liczbie przypisana jest, w sposób jednoznaczny, jakiś nazwa. Poza tym, kolejność liczonych obiektów nie ma znaczenia, ale kolejność liczebników jest ustalona. Liczebnik występujący na ostatnim miejscu podczas odliczania wyraża liczbę elementów w zbiorze [1]. Stosując te zasady w dziecięcej zabawie prowadzącej do nauki liczenia zliczamy elementy zbioru ustawione jeden za drugim, pogrupowane w pary, trójki, dziesiątki lub w ogóle nie zmieniamy ustawienia elementów, lecz odliczając przesuwamy palcem poszczególne elementy z jednego miejsca na drugie.



W tym samym czasie wypowiadamy kolejne liczebniki. Okazuje się (i to jest dziecięce odkrycie), że niezależnie od położenia liczba elementów zbioru jest taka sama. Wdrażanie dziecka do logicznego wnioskowania i wypowiadania swoich myśli kształtuje się latami, w oparciu o codzienne stymulowanie. Chodzi tu zarówno o prowokowanie celowe i zaplanowane (np. podczas wychowania przedszkolnego), jak i te spontaniczne, do których dochodzi np. podczas spaceru z dziadkiem, wizyty w kinie czy wieczornej zabawy przed snem w teatr cieni. *Wszak edukacja najmłodszych uczniów powinna umiejętnie splatać naukę z zabawą, by w łagodny sposób wprowadzić ich w świat szkoły[2].*



Wrażaniu dziecka do poprawnego liczenia służą rozmowy podczas codziennych czynności - np. „na kolacji będziemy mieć dzisiaj dwoje gości, przygotowujemy zatem o dwa nakrycia więcej dla: babci, dziadka, mamy, taty, dziecka” czy przy segregowaniu ubrań po praniu „skarpetki dobieramy w pary i wkładamy do szuflady”. Domowa edukacja matematyczna jest niezastąpionym uzupełnieniem programowego wychowania przedszkolnego, pozytywnie kształtuje relacje rówieśnicze oraz pomiędzy dziećmi a dorosłymi. Sprawia też, że dzieci odczuwając praktyczne zastosowanie, w sposób naturalny garną się do nauki. Prawidłowości matematyczne organizują całe nasze życie, towarzyszą wszelkim zadaniom, pracy, nauce, rozrywkom, a nawet emocjom i odczuciom. Wykorzystujmy więc wszystkie możliwości pojawiające się w naszym życiu do stopniowego kształtowania przez dziecko poprawnych intuicji matematycznych.

Andrzej Góralski w postłowie do książki Bruno de Finettiego podkreślił, że działanie pedagogiczne wymaga *współmierności intelektu i intuicji*. Rzecz więc w tym, *by pedagodzy opanowali rzemiosło rozwijania intuicji w stopniu równym z umiejętnością kształcenia intelektu*[3]. Wyrażony przed laty postulat jest aktualny, szczególnie adresowany jest do wszystkich, którzy przyczyniają się do rozwoju matematycznego myślenia dziecka. Wdrażanie do kształtowania poprawnych intuicji i tzw. załączków pojęć matematycznych, a co za tym idzie do osiągnięcia przez dziecko dojrzałości do uczenia się matematyki może zmniejszyć, opisywane przez Edytę Gruszczyk-Kolczyńską, blokady w edukacji matematycznej występujące już u dzieci kilkuletnich[4]. Zauważmy, że *nadmierne trudności uczniów w uczeniu się matematyki pojawiają się już na początku edukacji szkolnej, a ujawniają się w sposób wyraźny w klasach czwartych szkół podstawowych*. Narastające zaległości zastępują początkową fascynację dziecka szkołą i stopniowo przeradzają się w niezadowolenie, rozczarowania, frustracje także w, na długo zakorzenioną, niechęć do matematyki. Konsekwencją takich negatywnych zdarzeń jest systematyczne wygaszanie zainteresowań i zdolności oraz kumulowanie zaległości poznawczych podczas całego cyklu nauczania[5].



Matematyczna przygoda poznawcza małego dziecka często rozpoczyna się od wypowiedzania nazw liczb, ale, już od ponad 70 lat wiadomo, że już niemowlęta, na zasadzie subityzacji, czyli nagłego, pozaarytmetycznego spostrzegania różnic w liczebnościach zbiorów o niewielkiej liczbie elementów, rozróżniają zbiory 2 i 3 elementowe [6]. Proces świadomego i poprawnego liczenia rozwija się poprzez ciąg czynności przygotowawczych, do których możemy zaliczyć m.in. szacowanie. Małe dziecko najpierw wychwytuje *regularności rytmu, posługuje się gestem wskazywania*.

To gesty, o których Edyta Gruszczyk-Kolczyńska mówi, że zapowiadają możliwość liczenia. *Wskazywaniu na jakiś przedmiot przez dziecko chodzące i samodzielnie poznające obiekty w swoim otoczeniu towarzyszy ustalanie relacji pomiędzy istniejącymi obiektami, a ich umysłową reprezentacją, na zasadzie: jeden gest wskazujący – jeden realny obiekt – jedna reprezentacja w umyśle dziecka. Jest to początek reguły „jeden do jednego” stosowanej w liczeniu[7]* . Droga do prawidłowego liczenia prowadzi przez etap chaotycznego powtarzania przez dziecko (ok. czwartego roku życia) przypadkowych liczebników dwa, siedem, cztery, osiem... Później następuje zrozumienie stałej kolejności liczebników i przypisanie im poszczególnych elementów przeliczanego zbioru. Podkreślam w tym miejscu, że mimo opublikowanych w roku 1999 przez Briana Butterwortha wyników badań nad osiągnięciem poszczególnych umiejętności arytmetycznych przez dziecko do 7 roku życia[8], dane te mają jedynie charakter orientacyjny. Nie stanowią norm rozwojowych[9]. Potwierdzają to badania Edyty Gruszczyk-Kolczyńskiej świadczące o zróżnicowanym poziomie umiejętności liczenia przedmiotów przez dzieci przedszkolne[10]. Dlatego druga, dedykowana najmłodszym czytelnikom, część książki dystansuje się od określania konkretnych progów edukacyjnych, które „powinno” osiągnąć dziecko 4, 5 czy 6- letnie. Książka, przygotowana w konwencji *alfabetyzacji wizualnej* [11], ma za zadanie ukierunkować drogę małego odbiorcy ku świadomemu patrzeniu i rozumowaniu, interioryzowaniu spostrzeganych prawidłowości poprzez wyodrębnianie i interpretowanie obrazów fotograficznych. Cel książki oscyluje pomiędzy rozbudzaniem wrażliwości estetycznej dziecka ukierunkowanej na przejście *od biernego widzenia do aktywnego patrzenia* [12] a kształtowaniem myślenia matematycznego, którego sensem jest rozumne spostrzeganie, wnioskowanie, analizowanie procesów, formułowanie i rozwiązywanie problemów [13]. Intencją moją jest również pewien, zapewne niewielki, wkład w budowanie współczesnego języka matematycznej komunikacji małych dzieci.

Wieloletnia praktyka nauczycielska, jak również praktyka w przygotowaniu przyszłych nauczycieli matematyki na wszystkich poziomach nauczania zachęca mnie do zwrócenia uwagi na powszechne nieścisłości, a nawet błędy w stosowaniu terminologii podstawowej związanej z liczbami i liczeniem. Tak, ja już wspomniałam liczba jest obiektem abstrakcyjnym, trudnym do zrozumienia przez dziecko będące na przedoperacyjnym etapie rozwoju intelektualnego. Określenie liczby naturalnej jako *jedności myślowej wielu jedności* [14] nawiązuje do zliczania elementów zbioru poprzez dołączanie kolejnego elementu. Pochodzące od Bertranda Russela, a także od Friedricha Ludwiga Gottloba Fregego rozumienie liczby naturalnej jako mocy (liczby elementów w zbiorze skończonym) prowadzi do przypisania liczebników klasom zbiorów równolicznych. To znaczy, że niezależnie od tego jakie są elementy zbioru przypisujemy im „etykietę” informującą o liczbie tych elementów (pięć ziarenek piasku, pięć jabłek, pięć koni, pięć domów itd.). W stadium przedoperacyjnym zrozumienie, że zbiór pięciu ziarenek i zbiór pięciu domów mają po tyle samo elementów jest problemem, gdyż do dziecka silniej przemawia wielkość i rozległość elementów niż ich liczba. Dlatego podczas nauki liczenia bierzemy pod uwagę różnorodne zbiory rzeczy, które są blisko dziecka. Gdy jesteśmy w domu mogą to być: sztuczce, naczynia, ubrania, książki, zabawki, kwiaty na oknach, buty, obrazki; podczas wycieczki: samochody, rowery, słupki drogowe, lampy, schody; podczas uprawy ogródka: grządki, owoce, warzywa; podczas zabawy: samochody, lalki, misie.

Szczególną rolę w kształtowaniu dziecięcego sposobu liczenia odgrywa liczenie na palcach. To pierwszy i będący zawsze przy nas, zazwyczaj nie schowany pod ubraniem środek dydaktyczny służący zarówno do określania liczby elementów zbioru (np. trzy książki), jak również do podawania liczby porządkowej wskazującej na kolejność obiektów (np. strona piąta). Palce stosujemy do wskazywania, dotykania i przesuwania poszczególnych elementów przeliczanego zbioru.

Mają też zastosowanie przy wykonywaniu podstawowych działań na liczbach naturalnych. Monika Szczygieł, Krzysztof Cipora i Mateusz Hohol opisują wyniki badań stwierdzających dobrą korelację sprawności posługiwania przez dzieci się palcami, ich nazywania i numerowania z ich wysokimi umiejętnościami matematycznymi[15].

W przypadku zbiorów o niewielkiej liczbie elementów dziecko, nawet bez pomocy palców czy innych zbiorów zastępczych, zlicza te elementy w jednym i drugim zbiorze. Jeśli otrzymuje liczby równe, to znaczy, że zbiory są równoliczne. Np. dwa buty i dwie nogi lub cztery talerze dla czterech członków rodziny. Okazuje się, że przedszkolak, nawet jeśli zakres jego liczenia jest (jeszcze) niewielki. Potrafi doskonale sprawdzić równoliczność dwóch, nawet bardzo licznych, zbiorów. Ustala przyporządkowanie elementów jednego zbioru elementom zbioru drugiego. Takie ćwiczenie możemy wykonać w parku podczas jesiennego spaceru: „sprawdźmy, czy mamy tyle samo kasztanów i żołędzi”, przy podwieczorku: „czy ciastek i talerzyków jest tyle samo”? Podczas nadmorskiego odpoczynku kamyczki, muszelki na plaży zachęcają do zabawy w równoliczność. Jak sprawdzić czy mamy tyle samo muszelek, co małych kamyczków? Wystarczy do każdej muszelki włożyć po jednym kamyku. Jeśli jakaś muszla pozostanie pusta, to znaczy, że muszelek było więcej niż kamyczków.

Omawiane zagadnienie, związane z określeniem mocy zbioru przedstawiane jest w literaturze jako „kardynalny aspekt liczby naturalnej. Ponieważ dla wielu moich studentów to słowo nie było w pełni zrozumiałe i kojarzyło się z określeniem „błędu kardynalnego”, spieszę z prostym wyjaśnieniem: liczba kardynalna zbioru skończonego, to po prostu liczba jego elementów, zatem aspekt kardynalny dotyczy liczby elementów w zbiorze.

Zarówno publiczne wypowiedzi znanych osób, jak i rozmowy ze studentami, a nawet nauczycielami wychowania przedszkolnego upoważniają mnie do zabrania głosu na temat dwóch pojęć: cyfry i liczby. Nie używajmy błędnych określeń typu: „dodam cyfrę 5 do cyfry 7”, ani „frekwencja klasy III a wyraża się cyfrą 89%”. Tak, jak słowa języka ojczystego (i innych języków też) zapisujemy za pomocą liter, tak liczby zapisujemy za pomocą cyfr, czyli znaków graficznych. W dziesiętkowym systemie pozycyjnym dowolna liczbę można zapisać za pomocą dziesięciu cyfr: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, a w systemie dwójkowym (binarnym) – za pomocą dwóch cyfr: 0 lub 1. Te same cyfry, w ramach jednego systemu liczenia (weźmy na przykład 3, 4 i 7 i system dziesiętkowy) ustawione w odpowiednim porządku oznaczają inne liczby np. 347, 374, 437, 473, 743,734. Każda z nich odpowiada innej wartości. Zauważmy również, że tak samo wyglądający zapis liczby w różnych systemach może oznaczać inną wartość. Na przykład 1101 w systemie dziesiętkowym oznacza liczbę „jeden tysiąc sto jeden”, zaś interpretując ten sam zapis w systemie binarnym mamy liczbę „trzynaście”, bo $1+0+4+8=13$.

Proces dziecięcego liczenia kształtuje się w powiązaniu z nauką posługiwania się językiem. Nauka czytania i pisanie, podobnie jak nauka liczenia dotyczy kodowania i dekodowania informacji. Język matematyczny zaliczany jest zaś do najważniejszych składników kultury matematycznej ucznia[16]. Alexandre V. Borovik i Tony Gardiner[17] podkreślają trwały związek pomiędzy nabyciem podstawowych sprawności matematycznych a kształceniem matematycznego języka. Ten wątek będzie towarzyszył rozważaniom na temat kształtowania orientacji przestrzennej dziecka oraz rozumienia figur płaskich i przestrzennych zawartym w książce.



- [1] R. Gelman, C. Gallistel, *The child's understanding of number*. Publishing Harvard University Press, Cambridge, 1978.
- [2] Z. Marciniak, *O potrzebie reformy programowej kształcenia ogólnego*, Podstawa programowa z komentarzami Tom 6. Edukacja matematyczna i techniczna w szkole podstawowej, gimnazjum i liceum. Matematyka, zajęcia techniczne, zajęcia komputerowe, informatyka, s. 9.
- [3] A. Góralski, Postłowie do: B. de Finetti, *Sztuka widzenia w matematyce*, PWN, Wrocław 1983, s. 189-190.
- [4] E. Gruszczyk – Kolczyńska, *Diagnoza kryzysu w matematycznym kształceniu dzieci oraz rekomendowane działania naprawcze*, Opinia dla Najwyższej Izby Kontroli, <https://www.nik.gov.pl/plik/id,19329,vp,21937.pdf>.
- [5] M. Makiewicz, *Opinia w przedmiocie diagnozy problemów związanych z procesem nauczania matematyki w szkole (począwszy od IV klasy szkoły podstawowej) wraz z odpowiednimi rekomendacjami*, Opinia dla Najwyższej Izby Kontroli, <https://www.nik.gov.pl/plik/id,19330,vp,21938.pdf>.
- [6] E.L. Kaufman, M. W. Lord, T.W. Reese, J. Volkmann, *The discrimination of visual number*. American Journal of Psychology, 1949, 62, s. 498-525.
- [7] E. Gruszczyk – Kolczyńska, *Dziecięca matematyka – dwadzieścia lat później. Książka dla rodziców i nauczycieli starszych przedszkolaków*, Bliżej przedszkola, Kraków 2015, s. 53.
- [8] B. Butterworth, *The Mathematical Brain*, Macmillan, London, 1999.

- [9] U. Oszwa, *Rozwój i ocena umiejętności matematycznych dzieci sześciolatków*, W; Doradca nauczyciela sześciolatków, z. 7, 2006, s.4 -5.
- [10] E. Gruszczyk – Kolczyńska, *Dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki*, WSiP, Warszawa 1997, s.26.
- [11] S. Dylak, *Alfabetyzacja wizualna jako kompetencja współczesnego człowieka*, w: Media. Edukacja. Kultura. W stronę edukacji medialnej, W. Skrzydlewski, S. Dylak (red.), Polskie Towarzystwo Technologii i Mediów Edukacyjnych, Poznań-Rzeszów 2012, s. 126-127.
- [12] P. Sztompka, *Wyobraźnia wizualna i socjologia*, w: *Fotospołeczeństwo. Antologia tekstów z socjologii wizualnej*, red. M. Bogunia-Borowska, P. Sztompka, Kraków 2012, s. 28.
- [13] J. Mason, L. Burton, K. Stacey, *Matematyczne myślenie*, Warszawa 2005, s. 6.
- [14] L. Jeleńska, A. M. Rusiecki, *Metodyka arytmetyki i geometrii w pierwszych latach nauczania*, PZWS, Warszawa, 1957, s. 10.
- [15] M. Szczygieł, K. Cipora, M. Hohol, *Liczenie na palcach w ontogenezie i jego znaczenie dla rozwoju kompetencji matematycznych*, PSYCHOLOGIA ROZWOJOWA, 2015 , tom 20, nr 3, s. 23–33.
- [16] M. Makiewicz, *O fotografii w edukacji matematycznej. Jak kształtować kulturę matematyczną uczniów?* SKNMDM US, Szczecin 2013.
- [17] A.V. Borovik, T. Gardiner, *Mathematical Abilities and Mathematical Skills*, World Federation of National Mathematics Competitions Conference, Cambridge 2006.015 * tom 20, nr 3, s. 28.



Orientacja przestrzenna przedszkolaka

W edukacji matematycznej szczególną rolę odgrywa dobra wyobraźnia przestrzenna. Jej właściwe ukształtowanie warunkuje nie tylko sukces w poznawaniu matematyki, ale również umiejętność poruszania się w nieznanym terenie, komunikowania się, a także zdolność do dostrzegania problemów, zadawania pytań i podążania w kierunku odpowiedzi na nie. Wyobraźnia to, wg. Théodule Ribota, proces, stopniowego *wytwarzania wyobrażeń, będących odpowiednikami ruchu*. [1] Barbara Rabijewska przypisuje wyobrażeniom rolę obrazów pamięciowych zapisanych w świadomości niezależnie od bezpośredniej obecności przedmiotów. [2] Antoni Paradała pod pojęciem wyobraźni przestrzennej rozumie *dynamiczną zdolność czynnego wytwarzania wyobrażeń będących odbiciem form przestrzennych, płaskich i liniowych oraz zdolność przekształcania tych obrazów poprzez operacje myślowe*. [3]



Stymulowanie powstawania i rozwijanie dziecięcych wyobrażeń dokonuje się poprzez zabawki, zastosowane środki dydaktyczne, ale także modulację głosu czy prezentowanie obrazów. Te środki mają na celu wywołanie dziecięcej aktywności na skutek *zachwiania równowagi i konfliktu poznawczego*. [4] Wyobraźnia to proces, bez którego nie może być mowy o prawidłowym postrzeganiu i nazywaniu figur przestrzennych, określaniu zależności i związków występujących w tych figurach projektowaniu czy rozwiązywaniu przestrzennych zadań optymalizacyjnych. Zatem konieczna jest na wszystkich, opisywanych przez Pierrea van Hiele,[5] poziomach rozumienia pojęć matematycznych: wzrokowym,

w którym uczeń widzi figury holistycznie, rozróżnia je pod względem kształtu, położenia, pozycji, opisowym, w którym uczeń dokonuje analizy poznawanych figur, uogólnia przypisując nazwy, odkrywa ich własności, porządkuje oraz logicznym uwzględniającym porządkowanie własności figur i projektowanie. Te poziomy w pełni odpowiadają stadiom rozwoju intelektualnego Jeana Piageta. W szczególności poziom wzrokowy odpowiada okresowi działań przedoperacyjnych. W tym stadium, *trwającym od końca drugiego roku życia do końca okresu przedszkolnego dziecko potrafi odwoływać się do wcześniejszych doświadczeń, mówić o nich, naśladować je, poznawać otaczający świat za pomocą działania. Czynności konkretne są jednak w tym okresie nieodwracalne, dzieci nie potrafią w myśli poprzez czynność odwrotną powrócić do sytuacji wyjściowej (...)* Cechą charakterystyczną dla tego okresu jest myślenie intuicyjne, a rozumowanie opiera się przede wszystkim na spostrzeganiu, które z kolei bierze pod uwagę tylko jednego aspektu sytuacji czy zdarzenia, nie uwzględniając jednocześnie innych, pozostałych. [7]

Dobrze ukształtowana, w okresie przedoperacyjnym, orientacja przestrzenna stanowi podstawę do rozwijania się wyobraźni przestrzennej ucznia. Odgrywa również szczególną rolę, z punktu widzenia *dalszego rozwoju umiejętności matematycznych, ułatwia zrozumienie pojęć i naukę w ramach innych działów matematyki, wykraczających poza arytmetykę.* [8] Dlatego tak ważne są działania pedagogiczne ją wspierające.



Dzieci w okresie przedszkolnym cechuje tzw. egocentryzm polegający m.in. na trudności w dostrzeganiu i uwzględnieniu przez dzieci punktu widzenia innej osoby. [9] Dzieci przedszkolne znacznie lepiej rozróżniają określenia zmiany położenia: „w górę, w dół, do przodu, do tyłu” niż wskazywanie strony lewej i prawej. [10] Skoro rozumienie stron położenia innych obiektów przedszkolakom poważną trudność, aby ją pokonać proponuję w pierwszej kolejności utrwalenie budowy własnego ciała oraz położenia innych przedmiotów względem siebie. Jest to pierwszy etap drogi ku wykształceniu prawidłowej orientacji przestrzennej dziecka, który poprzedza *kształcenie różnicowania figur geometrycznych, rozumienia miar i zdolności dokonywania przekształceń*. [11] Poznawaniu budowy własnego ciała towarzyszą zabawy, piosenki, wierszyki i pląsy, w których pokazywane są ręce, nogi, głowa, kolana, pięty, dłonie, uszy, usta, nos. Dziecko łączy rozpoznawanie poszczególnych części swojego ciała z wskazywaniem, podawaniem funkcji oraz poprawnym nazywaniem i liczeniem – „mam dwie ręce, dwie nogi, po pięć palców w każdej dłoni”. Dobrze rozumienie kierunków (przód, tył bok) komplikuje się gdy potrzebujemy wskazać prawą lub lewą stronę. Rozpoznawanie i nazywanie swojej lewej i prawej strony wspomagają oznakowania barwne – kolorowe skarpetki (np. czerwona na stopie prawej, a niebieska na lewej). Niektórzy dorośli podczas nauki rozpoznawania przez dziecko swojej lewej i prawej strony przyczepiają na jednej ze stron jakiś znak. Może to być np. kokardka lub naklejka. Z powodów alergicznych i estetycznych nie polecam zaznaczania dłoni dziecka pisakami, farbami czy długopisem. Ciekawe, choć niełatwe, zadanie to rozpoznawanie prawej lub lewej dłoni, stopy, rękawiczki, buta, odcisku na śniegu, śladu pozostałego po dotknięciu dłoni na zaparowanym lustrze. Nieco trudniejsze zadanie polega na rozpoznawaniu prawej i lewej dłoni drugiej osoby „po dotyku”, z zamkniętymi oczyma.



Dotyk jest ważnym zmysłem, jego rolę dostrzegają wychowawcy, którzy proponują dzieciom ćwiczenia w nazywaniu znanych figur przestrzennych znajdujących się w nieprzeźroczystym worku. Dobrym ćwiczeniem jest również lubiana przez dzieci musztra polegająca na obracaniu się lub przemieszczaniu dzieci w ustalonym kierunku wypowiedzianym w formie rozkazu np. „w prawo zwrot”, „w lewo zwrot”, „dwa kroki na przód marsz”. Wypowiadanie poleceń „podnieś lewą nogę”, „dotknij prawego ucha”, „podskocz na prawej nodze”, podobnie jak podczas musztry, świetnie się sprawdzi, jeśli zamiennie polecenia będzie wydawał dorosły i dziecko. Po takich ćwiczeniach dziecko z łatwością wykształci swój punkt odniesienia. Doświadczenia z lustrem, odbiciem w tafli jeziora czy kałuży lub obserwacja kolegów stojących obok i naprzeciw siebie wzbudzają dziecięcy niepokój. To niezwykle ważny moment dydaktyczny. Niepewność wyrażona stwierdzeniem: „Gdy Jacek stoi obok mnie, to prawe stopy mamy z tej samej strony. Prawej. A gdy Jacek stoi naprzeciwko mnie, to jego prawa stopa jest z mojej lewej strony” jest krokiem ku lepszemu zrozumieniu pojęcia. Opanowanie, przez dziecko, rozpoznawania prawej i lewej strony osoby znajdującej się naprzeciwko jest etapem pośrednim w stosunku do zastosowania dowolnego ustalenia punktu odniesienia. Dobrze sprawdzają się tu maty z samochodami, klocki lub makiety przedstawiające przeszkody – np. góry, kolorowe domy, ogrody czy gospodarstwa. Służą one do przeprowadzenia badania Jeana Piageta umiejętności swobodnej zmiany punktu odniesienia. Odpowiedzi dziecka na pytania typu: „co widzi lalka ustawiona z prawej, lewej lub naprzeciw siebie” opisywane i komentowane przez Margaret Donaldson pozwalają stwierdzić *trudność dziecka w uświadomieniu sobie faktu, że to, co widzi jest zrelatywizowane w zależności od zajmowanej przez nie pozycji.* [12]

Na szczególnie ważny związek dobrego uczenia się matematyki przez przedszkolaków z kształtowaniem się u nich poprawnego języka ojczystego wskazuje Bronisław Ročławski. Dobre rozumienie sensu wypowiedzianych słów wzmacnia rozumienie pojęć, umożliwia dwukierunkową komunikację, pozwala przedstawiać swoje pomysły.

„Na gruncie języka naturalnego można obserwować swoistą grę między logiką i intuicją, analizą i konstrukcją, uogólnianiem i indywidualizowaniem. W tym wyraża się piękno świata, który nie jest do końca logiczny i do końca intuicyjny. (...) Każdy matematyk przyzna, że nie ma matematyki bez języka”. [13] Poprawne rozumienie sensu przyimków miejsca, które są nieodmiennymi częściami mowy, jest ważnym warunkiem dobrej komunikacji i prawidłowego kształtowania orientacji przestrzennej. Okazuje się, że dobrze sobie z tym radzą już dzieci kilkuletnie. Dobrze sprawdzają się tu ćwiczenia w stylu „powiedz gdzie jest miś”. Dziecko spoglądając na inscenizację/ obrazek/ fotografię odpowiada: „miś jest w pudełku”, „miś jest pod pudełkiem”, „miś jest przed pudełkiem”, „miś jest za pudełkiem”, „miś jest nad pudełkiem”, „miś jest obok pudełka”. Dobrze jest łączyć operację rozpoznawania przyimków i ich nazywania z zabawą w umieszczanie misia według instrukcji: „posadź misia przed pudełkiem”, „posadź misia za pudełkiem”, „posadź misia pod pudełkiem”, „posadź misia na pudełku”, „włóż misia do pudełka” itp. Jest to działanie mające na celu rozbudzenie podstawowych aktywności matematycznych ucznia sformułowanych przez Kazimierza Skurzyńskiego. [14] Dobrze, jeśli przygotujemy do tej zabawy fabułę np. chcemy zapakować prezent – misia w pudełko. Zauważmy, że określenie położenia zabawki względem pudełka nie jest jednoznaczne. Stwierdzenie „miś jest obok pudełka” pasuje zarówno do położenia z lewej jak i z prawej strony. Dzięki przyimkom możemy łatwo określić położenie jakiejś rzeczy względem innych – np. „pies siedzi pod stołem”, „na biurku leży książka”, „przed drzwiami leży wycieraczka”, „za domem jest śmietnik”, „pod nosem są usta”, „na ręce mam zegarek”, „nad głową wisi lampa”. Przyimek „między” określa położenie



rzeczy względem dwóch innych - np. „między pomiędzy pierścieniem czerwonym a niebieskim zabawkowej dżdżownicy jest pierścień żółty”, „pomiędzy oczami człowieka jest nos” lub „pomiędzy nożem a widelcem leży talerz”. Dopiero po dobrym opanowaniu rozumienia położenia przedmiotów widzialnych dziecko zacznie używać przyimków podczas określania rytmicznej organizacji czasu „pomiędzy wtorkiem a czwartkiem jest środa” lub „między lutym, a kwietniem jest marzec”. Podczas nauki liczenia pojawia się przyimek nawiązujący do umiejscowienia liczby na osi liczbowej „pomiędzy szóstką a ósemką jest siódemka”.

Podczas kształtowania umiejętności rozumienia położenia jednych rzeczy względem innych ważna jest atrakcyjność stosowanych przykładów. Powinny one dotyczyć codziennych sytuacji, z którymi dziecko spotyka się w domu, przedszkolu, na spacerze czy w sklepie. Przykładowo następujące komunikaty wypowiedziane w supermarkecie stają się dla dziecka jasne i zrozumiałe: „chrupki dla kota są w drugiej alejce po lewej stronie, za środkami czystości”, „naprzeciw regału z pieczywem są regały z konfiturami” lub „ lody są chłodni, na lewo od mrożonych owoców”.



Podczas wspólnego „czytania” materiałów graficznych (ilustracji, rysunków, plakatów, grafik) dziecko ćwiczy poprawne rozumienie położenia poszczególnych elementów obrazka. Opowiada: *„na środku stoi dom, nad nim leci ptak, obok rośnie drzewo. Na drzewie są dwie wiewiórki. W lewym górnym rogu widać słońce, a na lewo od domu stoi buda. Pies siedzi w budzie ”*. Kolejny etap – to rysowanie, malowanie, lub układanie klocków na podstawie instrukcji słownych. Przykładowo: *„ narysuj choinkę składającą się z trzech zielonych trójkątów i prostokątnego pnia. Na dolnym trójkącie zaznacz po 3 czerwone kółka, na środkowym - po 3 fioletowe, a na górnym - po 3 niebieskie. Na czubku choinki narysuj żółtą gwiazdkę. Pod choinką, z prawej strony narysuj różowe pudełko z fioletową kokardą”*.

Dziecko wykonując to zadanie musi zorganizować sobie miejsce na prostokątnej kartce. Ważne jest, aby najpierw wypowiedzieć wolno całą instrukcję, a potem ją wolno powtórzyć dając odpowiednio dużo czasu na działanie dziecka. Małe dzieci często rozpoczynają rysunek od brzegu kartki. Muszą zaplanować miejsce na gwiazdkę (ponad górnym trójkątem) oraz miejsce na narysowanie pudełka – pod dolnym. Zamiast malowania czy rysowania kredkami można najpierw posłużyć się gotowymi elementami wyciętymi z kolorowego papieru, stemplami lub naklejkami samoprzylepnymi. Można również użyć ekranu dotykowego lub tablicy interaktywnej.

Kształtowanie dobrej orientacji przestrzennej jest świetną zabawą. Zarówno dla dziecka, jak również dla twórczego wychowawcy i opiekuna. Poszukiwanie „skarbu” na kratkowanej kartce papieru, zabawa w chowanie misia w pudełku czy opisywanie ubioru lalki będzie dla dziecka atrakcyjne i jednocześnie kształćące.



- [1] T. Ribot, *O wyobraźni twórczej. Studjum psychologiczne*, „Głos”, Warszawa 1900, s. 9.
- [2] B. Rabijewska, *Wprowadzenie do niektórych zagadnień dydaktyki matematyki. Przewodnik po literaturze. Zagadnienia ogólne*, Uniwersytet Wrocławski, Wrocław 1980.
- [3] A. Pardała, *Wyobraźnia przestrzenna uczniów w warunkach nauczania szkolnej matematyki. Teoria, problemy, propozycje*, Wydawnictwo Oświatowe FOSZE, Rzeszów 1995, s. 66.
- [4] J. Piaget, *Narodziny inteligencji dziecka*, PWN, Warszawa 1966, s. 12.
- [5] R.M. Corberan, P. Huerta, J. Margarit, A. Penas, E. Ruiz, *Didactica de la geometria: modelo van Hiele*, Universitat de Valencia, Valencia 1989, s. 15.
- [6] W. Nowak, *Konwersatorium z dydaktyki matematyki*, PWN, Warszawa 1989, s. 50.
- [7] H. Siwek, *Czynnościowe nauczanie matematyki*, WSiP, Warszawa 1998, s. 37.
- [8] U. Oszwa, *Rozwój i ocena umiejętności matematycznych dzieci sześciolatków*, W; Doradca nauczyciela sześciolatków, z. 7, 2006, s.27.
- [9] A. Birch, T. Malim, *Psychologia rozwojowa w zarysie. Od niemowlęcia do dorosłości*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2002, s. 43.
- [10] H. Moroz, *Rozwijanie pojęć matematycznych u dzieci w wieku przedszkolnym*, WSiP, Warszawa, 1983, s. 21-22.
- [11] B. Bilewicz – Kuźnia, *Rozwijanie umiejętności matematycznych dzieci w wieku przedszkolnym*. Wydawnictwo UMCS, Lublin 2018, s. 108.
- [12] M. Donaldson, *Myślenie dzieci*, przeł. A. Hunca-Bednarska, E.M. Hunca, Wiedza powszechna, Warszawa 1986, s. 20-21.
- [13] B. Roślowski, *O związkach nauczania matematyki z nauczaniem języka w wychowaniu przedszkolnym i wczesnoszkolnym*. Glottispol sp. Z o.o. Gdańsk 2012, s. 59.
- [14] K. Skurzyński, *Niektóre metody rozwijania matematycznej aktywności uczniów*, WNUS, Szczecin 1997, s. 23-34.

Wstęp do geometrii przedszkolaka

Najważniejsza różnica pomiędzy liczbą a przestrzenią polega na tym, że przestrzeń wydaje się nam czymś mniej oderwanym i mniej podstawowym od liczby.

Alfred North Whitehead

Geometria. Jedna z siedmiu sztuk wyzwolonych. Jak mawiał Platon „pociąga duszę ku prawdzie i rodzi sposób myślenia godny filozofa przez to, że nasz wzrok od nizin ku wyższym podnosi przedmiotom” [1]. Geometria zrodziła się na gruncie problematyki mierzenia ziemi. Pod nazwą zawodu „geometra” kryje się człowiek mierzący grunty oraz przygotowujący mapy i plany. Geometra potrafił np. za pomocą sznurka z równomiernie zawiązanymi supłami wyznaczyć działkę w kształcie prostokąta. Aby uchwycić kąt prosty stosował twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa oraz model trójkąta egipskiego.

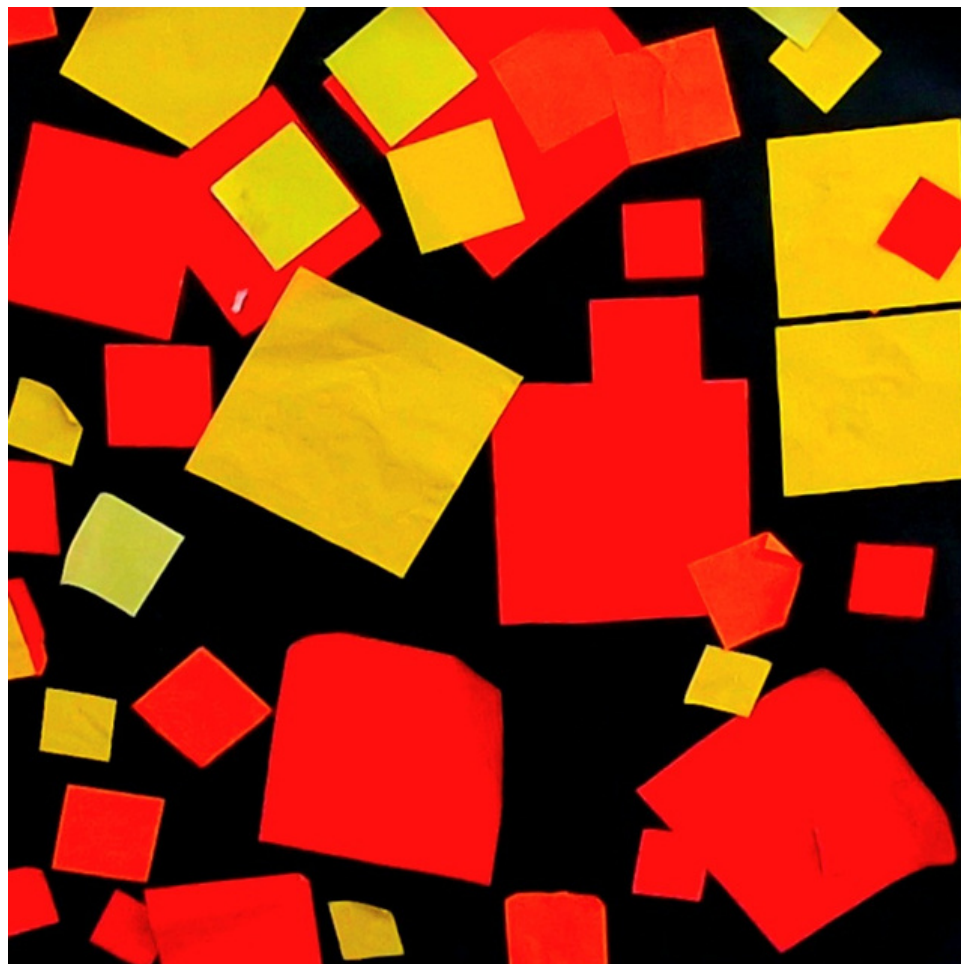
Współczesna geometria zajmuje się problemami łączącymi rozumienie figur płaskich i przestrzennych z algebrą, topologią, kombinatoryką. Geometria jest szczególnie ważnym, z punktu widzenia kształcenia wyobraźni, wycucia kształtu, formy, działem matematyki szkolnej. Co zadziwiające jest lubiana przez dzieci, aczkolwiek nie koniecznie przez nauczycieli. Nauczanie geometrii dzieci w wieku przedszkolnym wiąże się przede wszystkim z: uchwyceniem przez nie kształtu figury na poziomie wizualnym (chodzi o rozpoznawanie i nazywanie przedmiotów – np. kulistych), wydzieleniem własności badanej figury na poziomie opisowym (np. sześcián ma takie same ściany, jest ich sześć, są kwadratowe) oraz z logicznym badaniem związków pomiędzy własnościami (np. o ile zwiększy się powierzchnia kostki sześciennej jeśli dokleimy do jej ściany drugą?). Badania eksperymentalne prowadzone przez Urszulę Szućk wykazały, że u dzieci w wieku

przedszkolnym, a także oraz w młodszym wieku szkolnym można kształtować percepcję wzrokową i stymulować ich twórczość plastyczną. Badania te [2] określiły fundament do tworzenia nowej koncepcji pedagogicznej, stymulowania działań plastycznych dzieci, ale także do prowokowania poprzez sztukę odkryć w zakresie geometrii elementarnej w oparciu o tzw. „jakości wizualne” (barwę, linię i bryłę).

Geometria odgrywa istotną rolę w rozwijaniu elementarnej *kultury matematycznej* [3] dziecka wyrażającej się rozwijaniem ciekawości i zainteresowań, dostrzeganiem prawidłowości, piękna, elegancji i harmonii podstawowych pojęć matematycznych [4]. Od wielu lat wiemy, że „gotyckie katedry i doryckie świątynie są przeistoczoną w kamień matematyką” [5]. Rozumienie geometrii pomaga dostrzegać regularności architektury, zdobnictwa, prawidłowości procesów społecznych. Jest również doskonałym „tworzywem” do kształcenia matematycznego języka porozumiewania się w nauce [6].

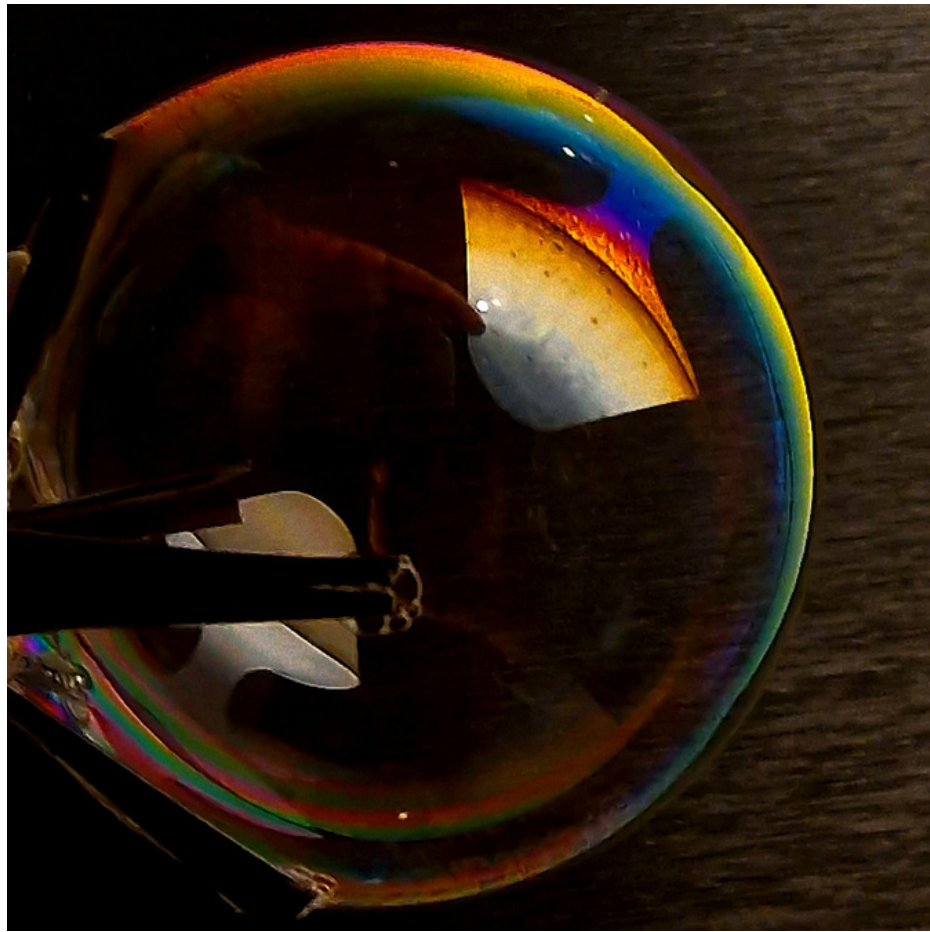
Ważną i aktualną tematyką badawczą jest analiza niechęci i blokad przed matematyką występujących już u małych dzieci. Niektóre przyczyny tego niepokojącego zjawiska związane są z osobą nauczyciela. Są to uwarunkowania *merytoryczne (niedostateczna znajomość matematyki), psycho-pedagogiczne (niewystarczająca wiedza o dziecku, o tym jakie są jego możliwości percepcyjne na każdym etapie rozwoju) oraz metodyczne (związane ze zdolnością nauczyciela do dobrego projektowania procesu dydaktycznego, w tym określania celów i dobierania odpowiednich metod, form i środków dydaktycznych)* [7]. Jednak trzeba podkreślić, że najważniejsza z trudności wiąże się z *pokonaniem przez dziecko dystansu, jaki dzieli je sposób myślenia (oparty na poznawalnym zmysłowo konkrecie) a sferą wnioskowania hipotetyczno - dedukcyjnego prowadzonego na obiektach abstrakcyjnych. [...] Wyjątkowość matematyki wśród innych przedmiotów nauczania polega m.in. na tym, że jej obiektów nie można odczuć zmysłami. Są niewidzialne, nie posiadają koloru, masy, zapachu, temperatury. Mają charakter abstrakcyjny, formalny. W życiu codziennym posługujemy się reprezentantami fizycznymi pojęć matematycznych* [8].

Trudność zmysłowego poznania matematyki, ponad sto lat temu, podkreślał znany matematyk, fizyk i filozof z Cambridge, Alfred North Whitehead: „Geometria jest nauką równie oderwaną, jak inne działy matematyki. Zajmuje się ona badaniem kształtów i względnych położeń figur, przyczem nic jej nie obchodzi kto spostrzega dane rzeczy i w jaki sposób zapoznaje się z niemi: za pomocą słuchu, dotyku czy wzroku. [...] Oglądanie poszczególnych przykładów stożków, kul, walców i t.p. figur niezawodnie dopomaga naszej wyobraźni, lecz twierdzenia geometrii dotyczą wszelkich figur pewnego rodzaju, nie zaś tych tylko, które mamy w danej chwili przed sobą” [9]. W edukacji matematycznej małych dzieci zachęcam do *stosowania metod opierających się na rozumowaniu redukcyjnym zakorzenionym w reprezentacjach zmysłowych* [10]. Są one niezastąpioną bazą do heurystycznych dociekań zastępujących lub uzupełniających klasyczne strategie dedukcyjne. Pamiętajmy, że dziecku *nie można zbyt wcześnie podawać wyjaśnień formalnych opartych na logice, ponieważ jest ona całkowicie obca umysłowi dziecięcemu (do pewnego wieku), a jej implikacje są dla niego jałowe* [11].



Wizytując hiszpańskie przedszkole spostrzegłam tablicę z przyczepionymi kartkami w kształcie kwadratów. W różnych rozmiarach i kolorach. Przyczepionych pod różnymi kątami. Nasycenie różnymi reprezentacjami idei „kwadratu” miało przybliżyć dzieci do istotnych cech tego pojęcia. *Wacław Zawadowski podkreśla, że matematyka zaczyna się tam, gdzie dziecko zaczyna odróżniać trójkąt (pomyślany) od przedmiotu w kształcie trójkąta* [12]. Sceptycznie odnoszę się do powszechnie stosowanej koncepcji aby uczyć dzieci rozróżniania prostokątów i kwadratów jako oddzielnych kategorii. Mimo, że nazwy tych figur wymieniane są w polskiej podstawie programowej obok siebie, należy uwzględnić ryzyko rozpoznania prawidłowych relacji pomiędzy kwadratem a prostokątem. Ryzyko dotyczy

budowania przez dziecko kategorii i kształtowania prawidłowego rozumowania logicznego. Proponuję jak najwcześniej wspomnieć, że taki prostokąt, który ma wszystkie boki tej samej długości ma dodatkowo drugą nazwę: „kwadrat”. W edukacji dziecięcej matematycznej posługujemy się często tzw. definicją ostensywną. Podczas przybliżania jakiegoś pojęcia unikamy formułowania definicji klasycznej, natomiast podając pewną liczbę przykładów – reprezentantów staramy się nasycić wyobrażenie o danym pojęciu. Liczba przykładów będzie wystarczająca wtedy, kiedy dziecko będzie w stanie oderwać swoje myślenie od koloru, rozmiaru figury, a przybliży się do własności niezmienniczych świadczących o tym, że daną figurę można nazwać kwadratem czy trójkątem.



W ramach wprowadzania dziecka w świat matematyki nie powinno być nauczane nic, co miałoby być w przyszłości odwoływane jako nieprawdziwe. To trudne zadanie, bo przecież mówiąc prawdę i tylko prawdę, nie zawsze możemy przedstawić całą... Spiralna charakterystyka programu nauczania zakłada wielokrotny namysł nad pojęciem. Ten namysł związany jest ze stopniowym przybliżaniem się do matematycznego abstraktu. Z początku to przybliżenie jest „grube”, niedokładne np. przy poznawaniu pojęcia sfery najpierw pojawia się kulka lub piłka, potem skórka od pomarańczy, potem mydlana bańka, której powierzchnia jest tak ulotna i cienka, że w połączeniu z przezroczystością można ją uznać za całkiem przyzwoitą reprezentację tego pojęcia.

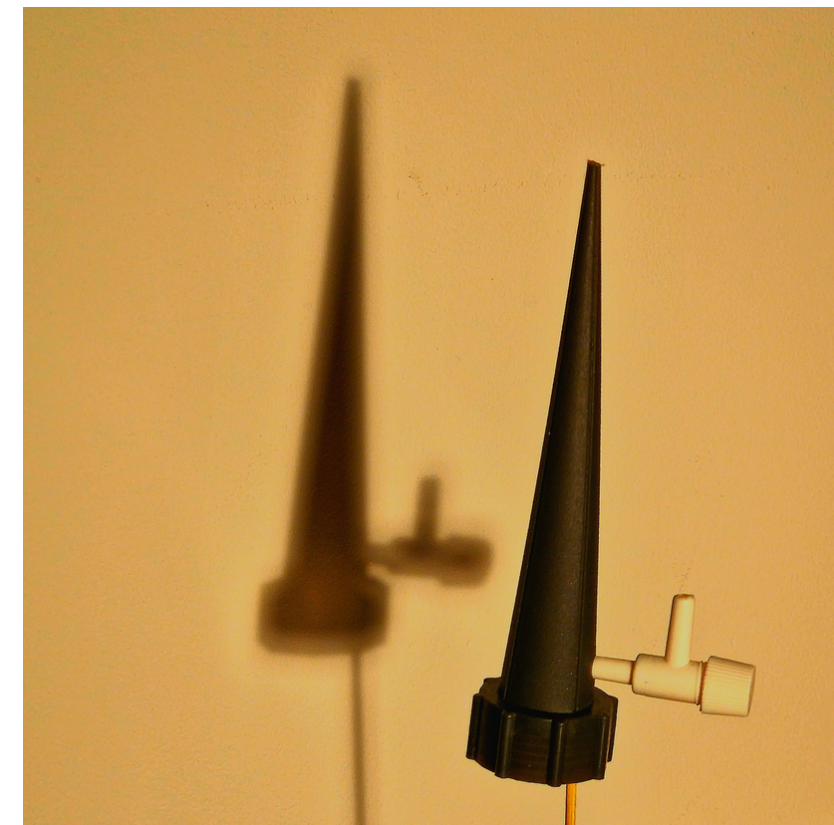
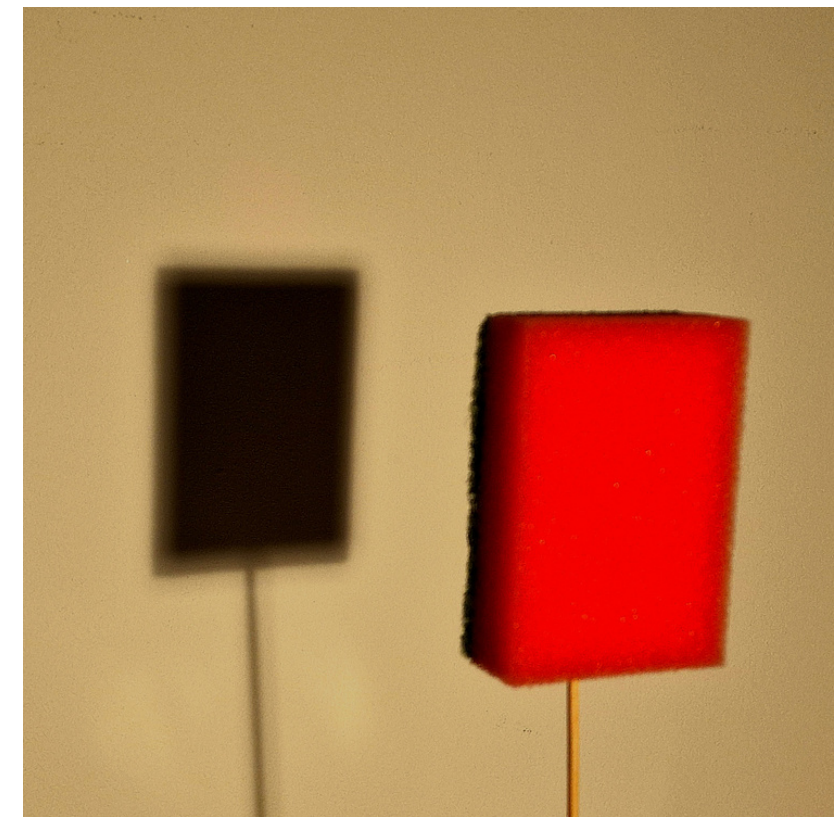
Stosunkowo prostą strategią dydaktyczną jest odwrócenie kolejności poznawania przez dziecko figur geometrycznych. Jestem zdania, że niewłaściwe jest rozpoczynanie dziecięcej edukacji poznawania figur płaskich, a następnie przechodzenie do figur przestrzennych. Przeczy to zasadzie stopniowania trudności, bo figury przestrzenne są po prostu dziecku bliższe. Przecież spotyka się z nimi już w okresie niemowlęcym (grzechotki, piłeczki)

Figury płaskie są niematerialne. Nie posiadają grubości, nie mają masy, nie można ich wziąć do ręki. Taką, wdawałoby się odwróconą, strategię polegającą na przejściu od figur z przestrzennych do figur płaskich reprezentuje wielu badaczy, których pasja naukowa jest zakorzeniona w praktyce nauczycielskiej. *Proces wyabstrahowania figur płaskich i liniowych z konkretnego bryłowego przebiega [...] naturalnie i nie trzeba wtedy tłumaczyć dziecku że kwadrat czy prostokąt stanowiący ścianę kostki nie mają grubości, którą ma ich model wycięty ze sklejki, blachy, tektury czy papieru [13].* Nauczanie początkowe geometrii powinno wiązać się z bryłami, które są bliskie dzieciom i lepiej wyobrażalne niż figury płaskie. Należy pamiętać, że *dziecko ma wrodzoną zdolność widzenia trójwymiarowego. Powinno być więc zapoznawane od samego początku z różnymi figurami w przestrzeni trójwymiarowej [14].*

Widziałam, jak nauczycielka chcąc przybliżyć dziecku kształt prostokąta pokazała białą kartkę papieru. Zapamiętałam reakcję na ten pokaz rezolutnego drugoklasisty, który zaprotestował „moja mama wczoraj kupiła 500 takich prostokątów i ta paczka była ciężka, miała grubość o taką” (pokazał palcami ok. 5 cm). Dziecko towarzyszyło mamie podczas zakupów ryzy papieru do drukarki. Jego spostrzeżenia wyzwoliły lepsze niż u nauczycielki wyczucie „przestrzenności” kartki. Nawiasem mówiąc w swojej praktyce nauczycielskiej tego typu uwagi, pytania czy komentarze moich uczniów oceniałam pochwałą i wysoką oceną. Studentka zapytała mnie „jak to? Ocena za zadane przez ucznia pytanie?”. Starłam się aby przyszła nauczycielka na tym przykładzie zrozumiała niesłychanie ważną funkcję oceny szkolnej, odległą od weryfikacji tzw. efektów kształcenia, a polegającą na wspieraniu i zachęcaniu ucznia do uwagi i odwagi poznawczej, do aktywności i ciekawości.

Jak wprowadzić dziecko do świata figur płaskich skoro nie można tych figur dotknąć? Wiele osób stosuje w tym celu zestawy klocków Dienes. Przy poznawczej zabawie tymi kolorowymi klockami pamiętajmy o szczególnej roli wspierającego dorosłego i przeciwdziałaniu ryzyku niewłaściwego kształtowania pojęć figur płaskich przy nazywaniu graniastosłupów o małej wysokości. Podaję w tej książce dwa sprawdzone przeze mnie sposoby.

Pierwszy związany jest z teatrem cieni. Zabawę w generowanie kształtów cieni rzucanych przez figury przestrzenne można poprowadzić w domu np. wieczorem przed snem. Zabawa nie wymaga drogich środków dydaktycznych. Wystarczy lampka, ściana i kilka przedmiotów o kształtach zbliżonych do prostopadłościanu, stożka czy kuli. W części tej książki dedykowanej dziecku, na fotografiach widać przedmioty codziennego użytku: gąbkę na naczyn, czapkę z papieru czy piłkę rzucające na ścianę płaskie cienie o kształtach prostokątnych, trójkątnych czy okrągłych. Cień, moim zdaniem, jest najlepszym sposobem pokazania figury płaskiej. Pozbawienie koloru, a także materialnego charakteru (grubości, masy) sprawia, że ta reprezentacja jest niemal idealna. Jak zgasimy źródło światła obraz znika, ale można go po chwili odtworzyć. Interaktywny charakter matematycznego teatru cieni daje możliwość doboru przedmiotów, ich położenia, odległości od rzutni. Dziecko, w toku takich doświadczeń po raz pierwszy spostrzega niejednoznaczność rzutowania. Samodzielnie wskazuje modele różnych figur przestrzennych rzucających identyczne cienie (np. walec i prostopadłościan rzucające cień w kształcie prostokąta). W nieświadomy (jeszcze) sposób spotyka się z funkcją, która nie jest różnowartościowa. Zgadywanka „jaka figura rzuciła dany cień” przypomina jaskinię platońską, w której kamienną ścianę zastąpiono rzutnią, a ognisko – latarką albo lampką. Z czasem dziecięce spostrzeżenia będą się krystalizować w stronę poznania własności jednokładności, cech podobieństwa i przystawania. Rzutowanie w kuchni lub łazience (tam, gdzie są prostokątne kafelki) może okazać się niezwykle kształcące, jeśli dorośli odpowiednio poprowadzi zabawę.



Obserwacja kwadratowych cieni, na wyższym poziomie zabawy, może prowadzić przedszkolaka do oryginalnych odkryć „dla każdego kwadratu można tak ustawić kwadratową przeszkodę, aby cień dokładnie pasował do kwadratowego kafelka”, co w przyszłości zaowocuje stwierdzeniem, że „wszystkie kwadraty są do siebie podobne” oraz „są takie prostokąty, których w żaden sposób nie można ustawić tak, aby cienie pasowały do kafelków prostokątnych”. W spirali dziecięcego poznania matematyki już w tym momencie pojawiają się załączki pojęć późniejszej matematyki szkolnej np. proporcji, podobieństwa czy izometrii. Takie dziecięce spostrzeżenia można zakwalifikować jako przejawy *twórczości typu mini - t, którą James Kaufman i Ronald Beghetto uznają za katalizator i drogowskaz do twórczości codziennej i wybitnej* [15]. Dziecięce odkrycia mają silne zabarwienie emocjonalne i wyzwalają serie pomysłów twórczych obejmujących zarówno elementarne procesy poznawcze (twórczość płynna) jak i pomysłów krystalizujących się w formie dążenia do rozwiązania postawionego problemu, zrozumienia jego struktury, znaczenia czy kontekstu (twórczość skryształizowana) [16].



Drugi, również wielokrotnie przeze mnie sprawdzony, sposób kształtowania dziecięcych wyobrażeń dotyczących figur płaskich to pieczętki. W książce proponuję zabawę w stemple wykonane z warzyw lub gąbki kuchennej i farb plakatowych. Naturalny kształt przekroju cebuli zachęca do omawiania koła, prostopadłościan wycięty z buraka – do prostokąta, a marchewka w kształcie walca – do koła. To niedroga i podręczna zabawa, która może towarzyszyć przygotowaniu posiłków. Gąbkę kuchenną można szybko i łatwo dopasować do kształtu, jaki chce się otrzymać. Wystarczą nożyczki i pomysł. Po tak przygotowanych stemplach dziecko tworzy własne kompozycje multiplikując odbicia poszczególnych stempli.

W obu przedstawionych przykładach starałam się uchwycić opisywane przez Jeana Piageta transfer pomiędzy manipulacją na przedmiotach realnych a czynnościami umysłowymi. *Dziecko przechodzi stopniowo od aktywności fizycznej, tj. czynności na przedmiotach materialnych, do aktywności wyobrażeniowej, a następnie do aktywności typu logiczno-matematycznego, której wyrazem jest możliwość przeprowadzania przez nie operacji, czyli odwracalnych czynności umysłowych* [17]. Obie przedstawione propozycje cechują się łatwym i niedrogim wykonaniem. Są bardzo lubiane przez najmłodszych i zachęcają do szeregu modyfikacji i aktywności twórczej.



- [1] K. Skurzyński, *Co piszą o matematyce? Myśli, sentencje, aforyzmy*, W; M. Makiewicz (red.), *Matematyka – nasza niedostrzegalna kultura. Wypowiedzi, cytaty o kulturze matematycznej, matematyce i jej nauczaniu*. Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 2022, s. 39.
- [2] U. Szuścik, *Sztuka i plastyka w nowoczesnym nauczaniu. W jakim stopniu sztuka jest potrzebna dziecku w kształtowaniu jego osoby i formowaniu go na przyszłość?* Akademia. Panorama. Edukacja. Magazyn Polskiej Akademii Nauk 3/67/2021, s. 22.
- [3] M. Makiewicz, *Elementy kultury matematycznej w fotografii*, WNUS, Szczecin 2011, s.7.
- [4] M. Makiewicz, K. Michalak, *Reflections on the Formation of a Child's Mathematical Culture at the Beginning of School Maturity*, Journal of Education, Technology and Computer Science No. 2(32)/2021, s. 34-44.
- [5] O. Spengler, *Der Untergang des Abendlandes. Umriss einer Morphologie der Weltgeschichte*, München 1923, s.84.
- [6] M. Makiewicz, *Language as a component of a student's mathematical culture. Dual coding of the path to understanding mathematical concepts using photography and text*, W: *Mathematik in Sprachen Europas. Linguistische Zugänge und interdisziplinäre Perspektiven* /M. Lisiecka-Czop, K. Sztandarska (red.), 2023, Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht Verlag, s.287-304.
- [7] J. Nowik, *Kształcenie matematyczne w edukacji wczesnoszkolnej*, Nowik, Opole 2009, s. 183.

- [8] M. Makiewicz, *Opinia w przedmiocie diagnozy problemów związanych z procesem nauczania matematyki w szkole (począwszy od IV klasy szkoły podstawowej) wraz z odpowiednimi rekomendacjami*, Opinia dla Najwyższej Izby Kontroli, <https://www.nik.gov.pl/plik/id,19330,vp,21938.pdf>
- [9] A.N. Whitehead, *Wstęp do matematyki*, przeł. Wł. Wojtowicz, Wydawnictwo Nakładem Księgarni E. Wende i Spółka, Warszawa – Lwów 1914, s. 212.
- [10] M. Makiewicz, *Rozważania o dwóch strategiach badawczych pedagogiki. Indukcyjny i dedukcyjny tok wnioskowania na przykładzie badań z zakresu kultury medialnej nastolatków*, *Lubelski Rocznik Pedagogiczny*, 2021, vol. 40, nr 3, s.61-78.
- [11] R. Duda, *Zasada paralelizmu w dydaktyce*, *Dydaktyka Matematyki I*, 1987, s. 131.
- [12] K. Skurzyński, *Co piszą o matematyce? Jak uczyć? Myśli, rady, zalecenia*, W; M. Makiewicz (red.), *Matematyka -- nasza niedostrzegalna kultura. Wypowiedzi, cytaty o kulturze matematycznej, matematyce i jej nauczaniu*. Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 2022, s. 45.
- [13] Z.M. Zimny, *Systemowe kształcenie matematyczne w klasach I-IV Szkoły Podstawowej*. Ramowy projekt programu autorskiego, Wydawnictwo WSP Częstochowa, Częstochowa 1996, s. 28-29.
- [14] J. Filip, T. Rams, *Dziecko w świecie matematyki*, Oficyna Wydawnicza IMPULS, Kraków 2000, s. 151.
- [15] W. Limont, *Uczeń zdolny. Jak go rozpoznać i jak z nim pracować*, GWP, Sopot 2010, p. 177.
- [16] E. Nęcka, *Psychologia twórczości*, Gdańskie Wydawnictwo Psychologiczne, Gdańsk 2001, s. 216-217.
- [17] J. Piaget, *Narodziny inteligencji dziecka*, przeł. M. Przetacznikowa, PWN, Warszawa 1966, s. 565.

Zakończenie

Książka została przygotowana w konwencji sztuki otwartej. Jej zadaniem jest także zaproszenie Czytelnika do własnych, nieustannie zmieniających się odczytań. Dorosłego – do aranżowania sytuacji dydaktycznych i do otwierania dziecięcych oczu na matematykę. Pedagogów – do refleksji nad współczesnymi sposobami wspierania formalnej i nieformalnej edukacji matematycznej dziecka. Dziecko - do twórczej zabawy przynoszącej nową wiedzę i umiejętności.

Książka składa się z dwóch części: skierowanej do pedagogów, wychowawców, rodziców i opiekunów dzieci w wieku przedszkolnym oraz części *malowanej światłem i dźwiękiem*, przeznaczonej dla najmłodszych czytelników. Starłam się w niej połączyć różne komunikaty znaczeniowe tak, aby najlepiej dopasować ich treść i formę do konkretnego odbiorcy. *Odmierna materia znakowa przekazów zdaje się całkowicie rozróżniać teksty (np. literackie i fotograficzne), ale [...] okazuje się, że można w nich odnaleźć analogiczne struktury, które zaświadczają o wspólności tekstów kultury w sferze poetyki; struktury te umożliwiają przekazom reprezentującym różne media wchodzenie w interakcje [1].* Książka pozostaje w pewnym dystansie wobec publikacji klasycznych, będących miejscem spoczynku i unieruchomienia słów [2]. Zawarte w niej fotografie i nagrania dedykowane dzieciom przedszkolnym mają kierunkować ich spostrzeganie oraz wzbogacać pole interpretacyjne w stronę matematyki. Towarzysząca odczytaniu fotografii wielokierunkowość i niejednoznaczność ma pobudzać uwagę i zachęcać do wysiłku interpretacyjnego. Ma wywołać twórcze dekodowanie informacji oraz skłonić do głębszego rozumienia pojęć matematycznych. Zastosowanie głosu lektora oraz wielu fotografii cyfrowych w propedeutycznym kształtowaniu myślenia matematycznego dziecka nie jest jedynie przykładem organizacji treści kształcenia. To, ugruntowany teoretycznie przykład przeplatania się dwóch komponentów naszej rzeczywistości: realnego i cyfrowego znany w pedagogice jako kształcenie komplementarne [3]. Komplementarność można również odczytać w ciągłym przemieszczeniu się pomiędzy trzema reprezentacjami opisywanymi przez Jerome Brunera. Obrazy tworzone w oparciu o konkretne czynności realne dostarczają struktury prekonceptualnej umożliwiając rekonstruowanie klas poznawczych nawet na poziomie przedoperacyjnym [4].

Dzisiejsze media cyfrowe za sprawą Internetu i możliwości zapisu cyfrowego pozwalają na przekroczenie bariery terytorialnej i temporalnej. Wypełniają dziś przestrzeń wokół nas. Przynoszą z sobą ryzyko zniewolenia i dezinformacji, ale jednocześnie dają szansę edukacji skutecznej, dostosowanej do potrzeb dziecka XXI wieku. Bywa, że dziecko lepiej orientuje się w tajnikach eksploatacji urządzeń elektronicznych niż jego rodzice. Uważa je za wszechobecne i oczywiste. Czuje się bezpiecznie, gdy jest *online*. Fotografia cyfrowa jest niezwykle popularnym sposobem oddziaływania międzyludzkiego. Na tle innych mediów cyfrowych wyróżnia się wiarygodnością i powszechnością. Służy komunikowaniu, dokumentowaniu, zatrzymywaniu i dzieleniu się z innymi odczuciami towarzyszącymi spostrzeganiu. Fotografia stanowi także wielowymiarowy środek dydaktyczny, którego funkcje i możliwości przedstawiłam w swojej koncepcji dydaktycznej zwanej fotoedukacją matematyczną [6]. Koncepcja ta nie koncentruje się na samych fotografiach, lecz na człowieku, który je sporządza i który ich doświadcza. Uaktywnia odtwórcze i twórcze procesy myślowe, przybliża abstrakcyjne pojęcia i prawidłowości zarówno poprzez metafory obrazowe, jak i słowne [7].

[1] E. Szczęsna, *Komparatystyka mediów. Poetyka, semiotyka, komunikacja medialna*, w: M. Dąbrowski (red.), *Komparatystyka dla humanistów*, Warszawa 2011, s. 297.

[2] J. van Dijk, *Společne aspekty nowych mediów. Analiza społeczeństwa sieci*, przekł. J. Konieczny, Warszawa 2010, s. 14.

[3] M. Tanaś, J. J. Czarkowski, *Techniki informatyczne w perspektywie nauk pedagogicznych*, Edukacja Zawodowa i Ustawiczna nr 4/2019, s. 110.

[4] J. Bruner, *Kultura edukacji*, przeł. T. Brzostowska-Tereszkiewicz, Universitas, Kraków 2010, s. 214-216

[5] J. van Dijk, *Společne aspekty nowych mediów. Analiza społeczeństwa sieci*, przeł. J. Konieczny, WN PWN, Warszawa 2010, s. 14.

[6] M. Makiewicz, *O fotografii w edukacji matematycznej. Jak kształtować kulturę matematyczną uczniów?* SKNMDM Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 2013.

[7] Tamże, s. 205.

Bibliografia:

- B. Bilewicz-Kuźnia, *Rozwijanie umiejętności matematycznych dzieci w wieku przedszkolnym*. Wydawnictwo UMCS, Lublin 2018.
- A. Birch, T. Malim, *Psychologia rozwojowa w zarysie. Od niemowlęcia do dorosłości*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2002.
- A.V. Borovik, T. Gardiner, *Mathematical Abilities and Mathematical Skills*, World Federation of National Mathematics Competitions Conference, 2006.015 * tom 20, nr 3, Cambridge 2006
- J. Bruner, *Kultura edukacji*, przeł. T. Brzostowska-Tereszkiewicz, Universitas, Kraków 2010.
- B. Butterworth, *The Mathematical Brain*, Macmillan, London, 1999.
- R.M. Corberan, P. Huerta, J. Margarit, A. Penas, E. Ruiz, *Didactica de la geometria: modelo van Hiele*, Universitat de Valencia, Valencia 1989.
- J. van Dijk, *Spółeczne aspekty nowych mediów. Analiza społeczeństwa sieci*, przeł. J. Konieczny, WN PWN, Warszawa 2010.
- M. Donaldson, *Myślenie dzieci*, przeł. A. Hunca-Bednarska, E.M. Hunca, Wiedza powszechna, Warszawa 1986.
- R. Duda, *Zasada paralelizmu w dydaktyce*, Dydaktyka Matematyki I, 1987.
- S.Dylak, *Alfabetyzacja wizualna jako kompetencja współczesnego człowieka, w: Media. Edukacja. Kultura. W stronę edukacji medialnej*, W. Skrzydlewski, S. Dylak (red.), Polskie Towarzystwo Technologii i Mediów Edukacyjnych, Poznań-Rzeszów 2012.
- J. Filip, T. Rams, *Dziecko w świecie matematyki*, Oficyna Wydawnicza IMPULS, Kraków 2000.
- R. Gelman, C. Gallistel, *The child's understanding of number*. Publishing Harvard University Press, Cambridge, 1978.
- E. Gruszczyk – Kolczyńska, *Dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki*, WSiP, Warszawa 1997.
- E. Gruszczyk – Kolczyńska, *Dziecięca matematyka – dwadzieścia lat później. Książka dla rodziców i nauczycieli starszych przedszkolaków*, Bliżej przedszkola, Kraków 2015.
- E. Gruszczyk – Kolczyńska, *Diagnoza kryzysu w matematycznym kształceniu dzieci oraz rekomendowane działania naprawcze*, Opinia dla Najwyższej Izby Kontroli, 2018, <https://www.nik.gov.pl/plik/id,19329,vp,21937.pdf>.
- A. Góralski, Postówie do: B. de Finetti, *Sztuka widzenia w matematyce*, PWN, Wrocław 1983.
- L. Jeleńska, A. M. Rusiecki, *Metodyka arytmetyki i geometrii w pierwszych latach nauczania*, PZWS, Warszawa, 1957.
- E.L. Kaufman, M. W. Lord, T.W. Reese, J. Volkman, *The discrimination of visual number*. American Journal of Psychology, 1949, 62
- M. Kielar-Turska, *Jak stymulować badawczą aktywność dziecka*, Wychowanie w Przedszkolu, nr 9/1987.
- W. Limont, *Uczeń zdolny. Jak go rozpoznać i jak z nim pracować*, GWP, Sopot 2010.

- M. Makiewicz, *Elementy kultury matematycznej w fotografii*, WNUS, Szczecin 2011.
- M. Makiewicz, *O fotografii w edukacji matematycznej. Jak kształtować kulturę matematyczną uczniów?* SKNMDM Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 2013.
- M. Makiewicz, *Math & Art. Reprezentacje enaktywne w edukacji matematycznej – badania w działaniu*, SKNMDM Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 2018.
- M. Makiewicz, *Math & Art. Wizualne drogi do reprezentacji symbolicznych pojęć matematycznych*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 2021.
- M. Makiewicz, *Rozważania o dwóch strategiach badawczych pedagogiki. Indukcyjny i dedukcyjny tok wnioskowania na przykładzie badań z zakresu kultury medialnej nastolatków*, Lubelski Rocznik Pedagogiczny, 2021, vol. 40, nr 3.
- M. Makiewicz, *Language as a component of a student's mathematical culture. Dual coding of the path to understanding mathematical concepts using photography and text*, W: *Mathematik in Sprachen Europas. Linguistische Zugänge und interdisziplinäre Perspektiven* /M. LisieckaCzop, K. Sztandarska (red.), Vandenhoeck & Ruprecht Verlag, Göttingen 2023.
- M. Makiewicz, *Opinia w przedmiocie diagnozy problemów związanych z procesem nauczania matematyki w szkole (począwszy od IV klasy szkoły podstawowej) wraz z odpowiednimi rekomendacjami*, Opinia dla Najwyższej Izby Kontroli, 2018, <https://www.nik.gov.pl/plik/id,19330,vp,21938.pdf>.
- M. Makiewicz, K. Michalak, *Reflections on the Formation of a Child's Mathematical Culture at the Beginning of School Maturity*, Journal of Education, Technology and Computer Science No. 2(32)/2021.
- Z. Marciniak, *O potrzebie reformy programowej kształcenia ogólnego*, Podstawa programowa z komentarzami Tom 6. Edukacja matematyczna i techniczna w szkole podstawowej, gimnazjum i liceum. Matematyka, zajęcia techniczne, zajęcia komputerowe, informatyka. http://magdymatyka.rze.pl/dokumenty/matura/reforma_tom_6.pdf
- J. Mason, L. Burton, K. Stacey, *Matematyczne myślenie*, Warszawa 2005.
- H. Moroz, *Rozwijanie pojęć matematycznych u dzieci w wieku przedszkolnym*, WSiP, Warszawa, 1983.
- E. Nęcka, *Psychologia twórczości*, Gdańskie Wydawnictwo Psychologiczne, Gdańsk 2001.
- W. Nowak, *Konwersatorium z dydaktyki matematyki*, PWN, Warszawa 1989.
- J. Nowik, *Kształcenie matematyczne w edukacji wczesnoszkolnej*, Nowik, Opole 2009.

- U. Oszwa, *Rozwój i ocena umiejętności matematycznych dzieci sześciolatek*, W; Doradca nauczyciela sześciolatek, z. 7, 2006.
- A. Paradała, *Wyobraźnia przestrzenna uczniów w warunkach nauczania szkolnej matematyki. Teoria, problemy, propozycje*, Wydawnictwo Oświatowe FOSZE, Rzeszów 1995.
- J. Piaget, *Narodziny inteligencji dziecka*, przeł. M. Przetacznikowa, PWN, Warszawa 1966.
- T. Ribot, *O wyobraźni twórczej. Studium psychologiczne*, „Głos”, Warszawa 1900.
- Rabijewska, *Wprowadzenie do niektórych zagadnień dydaktyki matematyki. Przewodnik po literaturze. Zagadnienia ogólne*, Uniwersytet Wrocławski, Wrocław 1980.
- Roślowski, *O związkach nauczania matematyki z nauczaniem języka w wychowaniu przedszkolnym i wczesnoszkolnym*. Glottispol sp. Z o.o. Gdańsk 2012.
- H. Siwek, *Czynnościowe nauczanie matematyki*, WSiP, Warszawa 1998.
- O. Spengler, *Der Untergang des Abendlandes. Umriss einer Morphologie der Weltgeschichte*, München 1923.
- K. Skurzyński, *Niektóre metody rozwijania matematycznej aktywności uczniów*, WNUS, Szczecin 1997.
- K. Skurzyński, *Co piszą o matematyce? Jak uczyć? Myśli, rady, zalecenia*, W: M. Makiewicz (red.), *Matematyka – nasza niedostrzegalna kultura. Wypowiedzi, cytaty o kulturze matematycznej, matematyce i jej nauczaniu*. Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 2022.
- K. Skurzyński, *Co piszą o matematyce? Myśli, sentencje, aforyzmy*, W: M. Makiewicz (red.), *Matematyka – nasza niedostrzegalna kultura. Wypowiedzi, cytaty o kulturze matematycznej, matematyce i jej nauczaniu*. Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 2022.
- Szczęsna, *Komparatystyka mediów. Poetyka, semiotyka, komunikacja medialna*, w: M. Dąbrowski (red.), *Komparatystyka dla humanistów*, Warszawa 2011.
- M. Szczygieł, K. Cipora, M. Hohol, *Liczenie na palcach w ontogenezie i jego znaczenie dla rozwoju kompetencji matematycznych*, *Psychologia Rozwojowa*, 2015, tom 20, nr 3, s. 23–33.
- P. Sztompka, *Wyobraźnia wizualna i socjologia*, w: *Fotospołeczeństwo. Antologia tekstów z socjologii wizualnej*, red. M. Bogunia-Borowska, P. Sztompka, Kraków 2012.
- S. Szuman, *Psychologia wychowawcza wieku dziecięcego. Podręcznik dla matek i wychowawczyń w przedszkolach i domach dziecięcych oraz dla nauczycieli i studentów studiujących rozwój psychiczny dziecka*, Instytut Wydawniczy Nasza Księgarnia, Warszawa 1946.

- U. Szuścik, *Kształtowanie percepcji wzrokowej jako stymulator działań plastycznych dzieci*. Chowanna 1995, 1, 26-31.
- U. Szuścik, *Bazgrota w twórczości plastycznej dziecka*. Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Śląskiego, Katowice 2019.
- U. Szuścik, *Sztuka i plastyka w nowoczesnym nauczaniu. W jakim stopniu sztuka jest potrzebna dziecku w kształtowaniu jego osoby i formowaniu go na przyszłość?* Akademia. Panorama. Edukacja. Magazyn Polskiej Akademii Nauk 3/67/2021.
- M. Tanaś, J. J. Czarkowski, *Techniki informatyczne w perspektywie nauk pedagogicznych*, Edukacja Zawodowa i Ustawiczna nr 4/2019.
- M. Tyszkowa, *Aktywność i działalność dzieci i młodzieży*, Warszawa 1997.
- A.N. Whitehead, *Wstęp do matematyki*, przeł. Wł. Wojtowicz, Wydawnictwo Nakładem Księgarni E. Wende i Spółka, Warszawa – Lwów 1914.
- K. Wojtowicz, *Filozofia matematyki J.S. Milla*, Przegląd Filozoficzny — Nowa Seria R. 15:2006, Nr 4 (60),
- D. Wood, *Jak dzieci uczą się i myślą. Społeczne konteksty rozwoju poznawczego*, przeł. R. Pawlik, A Kowalcze- Pawlik, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków 2006.
- L. S. Wygotski, *Wybrane prace psychologiczne*, przeł. E. i J. Flesznerowie, PWN, Warszawa 1971.
- Z. M. Zimny, *Systemowe kształcenie matematyczne w klasach I-IV Szkoły Podstawowej. Ramowy projekt programu autorskiego*, Wydawnictwo WSP Częstochowa, Częstochowa 1996

Rekomendacje

Książka Małgorzaty Makiewicz jest kolejną interesującą publikacją z zakresu zainteresowania młodego odbiorcy matematyką. W sposób atrakcyjny treściowo i wizualnie Autorka wprowadza czytelnika w zagadnienia i rozwój umiejętności liczenia, mierzenia, ważenia, poznawania figur poprzez zabawę. Jest to przykład twórczej i innowacyjnej propozycji edukacji dziecka w wieku przedszkolnym w obszarze matematyki. Dziecko wspólnie z rodzicami, nauczycielem czy innym opiekunem poznaje treści matematyczne i dostrzega je w swoim życiu. Jest to przygotowanie dziecka do edukacji szkolnej i niwelowania strachu przed matematyką, czy niewiarą we własne zdolności, umiejętności matematyczne. Przedstawione i opisane kreatywne zabawy wizualno-matematyczne kształtują osobę dziecka, jego emocje, myślenie, kreatywne podejście do szukania rozwiązań w zabawie matematycznej. Publikacja zainspiruje zarówno rodziców jak i nauczycieli do ciekawych poznawczo zabaw matematycznych z dziećmi i tym samym matematyką.

prof. dr hab. Urszula Szuścik



Książka: „Math & Art. Patrz, to matematyka” mieści się w nurcie poszukiwań przez Profesor Małgorzatę Makiewicz złotego kluczyka otwierającego serca i umysły dzieci i młodzieży na wiedzę i umiejętności matematyczne. Dążeniom o rozwój kompetencji matematycznych towarzyszy nie tylko merytoryczna wiedza Autorki pracy, ale też wyjątkowa dbałość o językową i wizualną estetykę dzieła, sprawne wykorzystanie multimedialnych narzędzi i rzetelna wiedza o poznawczym rozwoju człowieka.

Nie dziwi przeto, że prace Profesor Małgorzaty Makiewicz zmierzające do rozwoju kultury matematycznej wywołują od lat tak wielkie zainteresowanie naukowe, szerzej - społeczne. Dzieje się tak zarówno w przypadku stworzonego przez Panią Profesor pierwszego w świecie, międzynarodowego konkursu fotograficznego „Matematyka w obiektywie”, jak i składanych do znakomitych wydawnictw propozycji popularyzujących kulturę matematyczną. Budzą one nie tylko zainteresowanie środowisk akademickich oraz osób zafascynowanych matematyką, ale też co istotne – nauczycieli i rodziców, rozumiejących jakie znaczenie dla losów człowieka i kraju ma rozwój osobistych kompetencji w tym zakresie i to od zarania dzieciństwa.

Książka: „Math & Art. Patrz, to matematyka” dowodzi, że Profesor Małgorzata Makiewicz odkryła ów szczerzłoty klucz pozwalający otwierać nieznane drogi w tajemny świat matematycznej przygody. Zaproponowana przez Autorkę intelektualna wędrówka porusza umysły, uczy patrzeć i rozumieć. Jest źródłem niezwykłych przeżyć i matematycznych fascynacji.

Warte podkreślenia jest także to, że Autorka ujawnia wyjątkowy talent w posługiwaniu się narzędziami przemawiającymi do wielu zmysłów czytelnika, widza i słuchacza. Owa polisensoryczność dzieła stanowi jego olbrzymią wartość. I tonie tylko przez oryginalność, ale nade wszystko przez trafienie w gusta osób funkcjonujących w przenikających się przestrzeniach świata realnego i wirtualnego, żyjących w okresie gwałtownego rozwoju sztucznej inteligencji, biotechnologii, robotyki i komputerów kwantowych.

dr hab. Maciej Tanaś, prof. APS