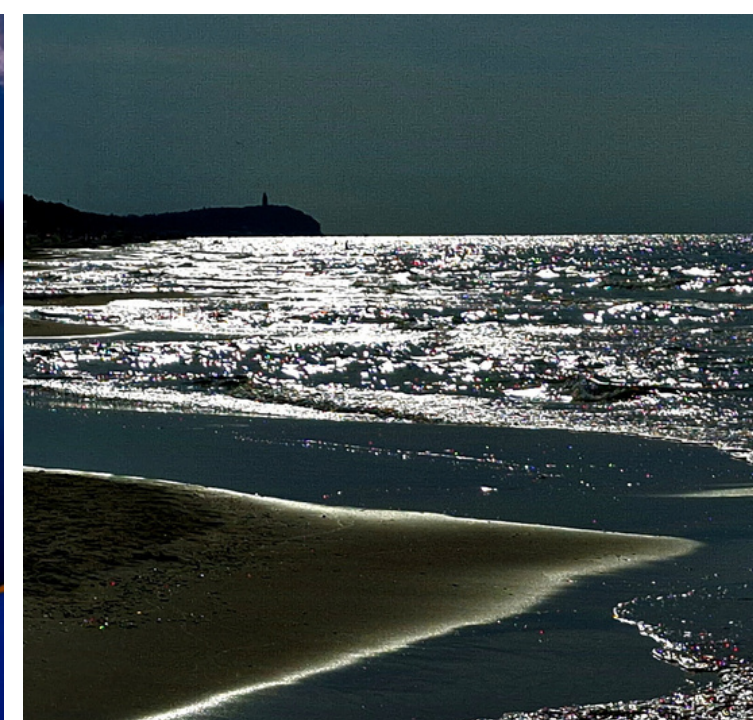
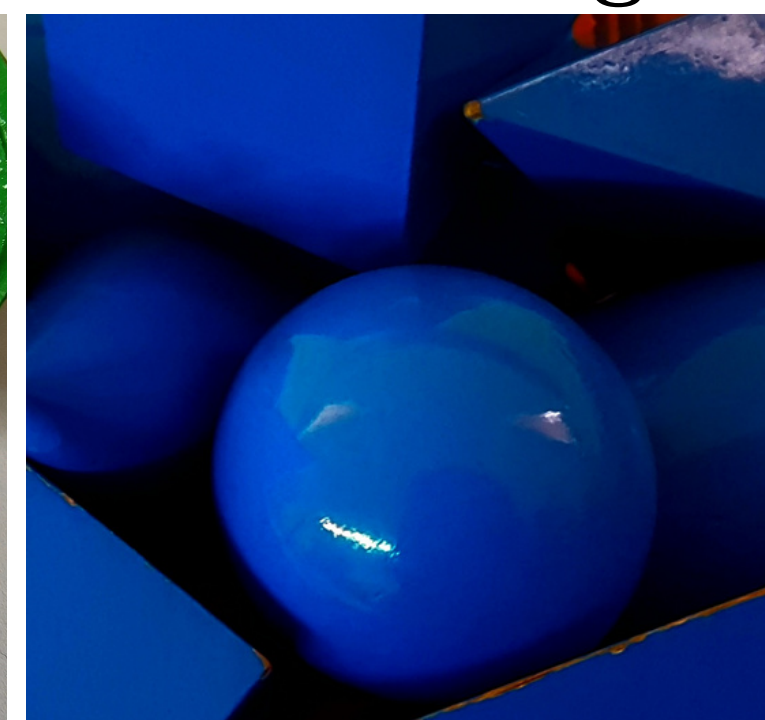
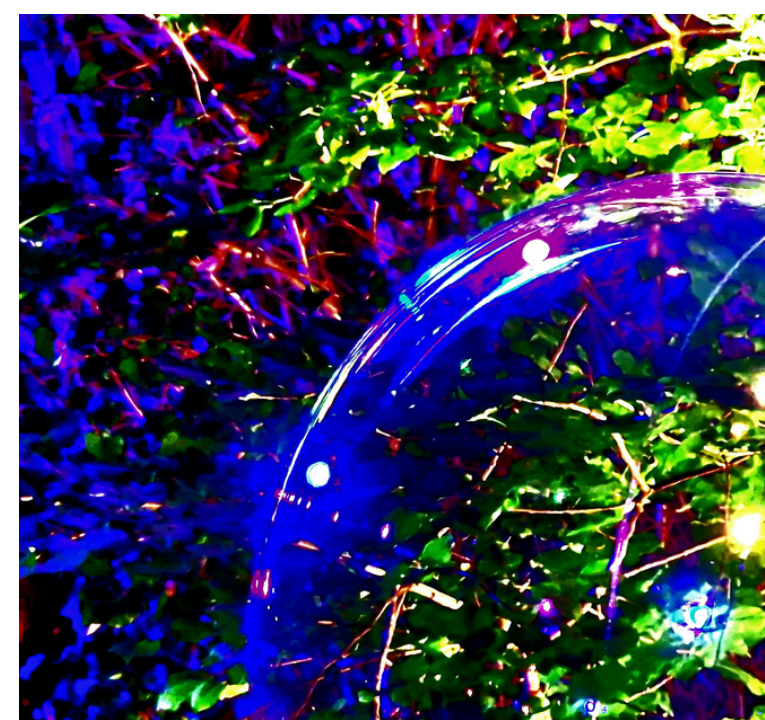


Math & Art. Mira, es matemáticas.

Małgorzata Makiewicz



Math & Art. Mira, son matemáticas.
Małgorzata Makiewicz

Revisores:
prof. Urszula Szuścik,
prof. Maciej Tanaś,

© Copyright Małgorzata Makiewicz

ISBN ISBN 978-83-66055-41-4 DOI 10.34916/ma.p-tm.es.01
Małgorzata Makiewicz ORCID: 0000-0003-3120-2839

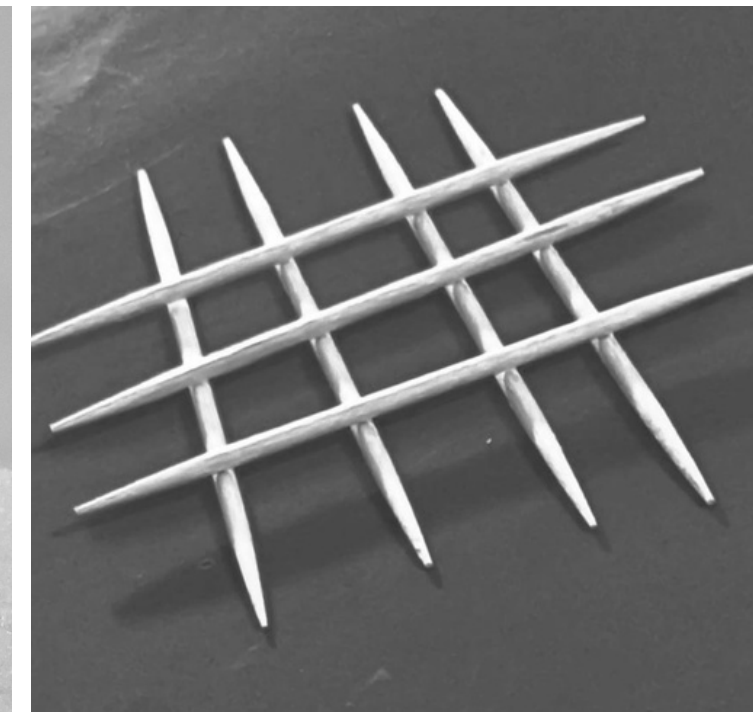
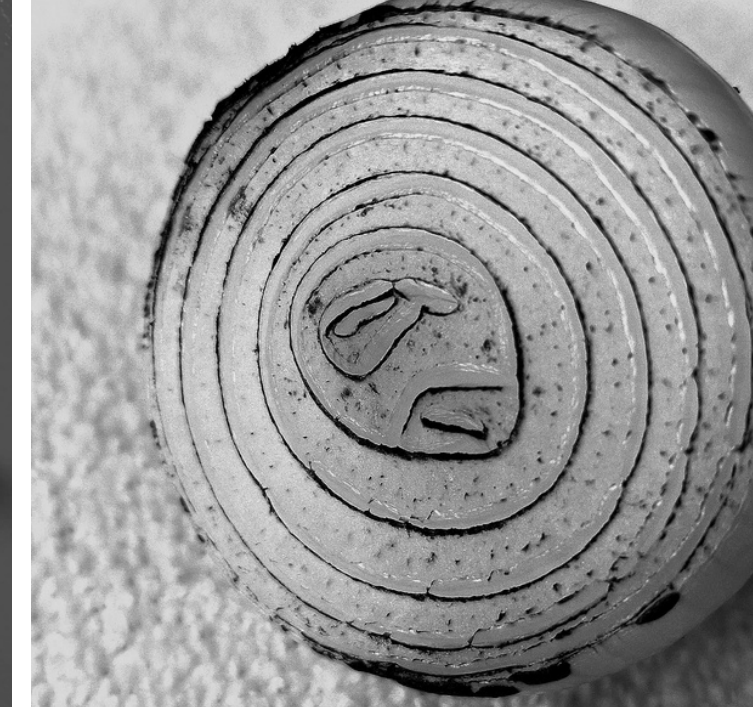
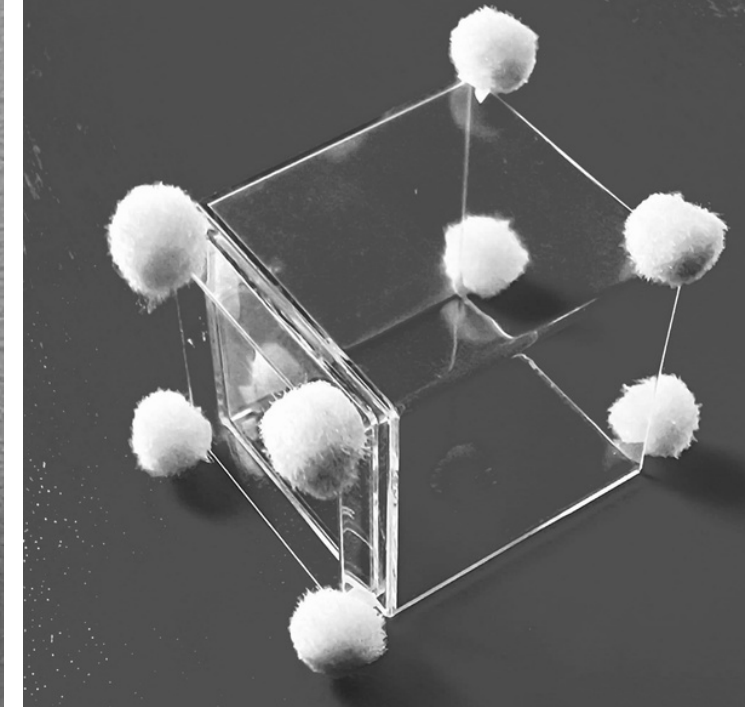
Editorial: Editorial Científica STUDIO NOA, Primera Edición, Katowice 2023

Diseño gráfico: Małgorzata Makiewicz, Agnieszka Urbaniak

En el libro se utilizaron fotografías de Małgorzata Makiewicz (215 unidades), Agnieszka Urbaniak (4 unidades) y Monika Orczyk (21 unidades), así como gráficos de Piotr Makiewicz.



La publicación fue subvencionada por el Ministerio de Educación y Ciencia como parte del Programa de Apoyo a la Educación. Proyecto MEiN/2023/DPI/2972 "Math&Art. Mira, es matemáticas". El beneficiario es la "Fundación Mozaika".





Índice

PARTE I (para maestros, educadores, padres y tutores de niños en edad preescolar)

Introducción	4
El conteo en edad preescolar	7
Orientación espacial en preescolares	17
Introducción a la geometría para preescolares. Figuras geométricas planas y espaciales.	25
Conclusión y presentación de la parte dedicada a los preescolares	34
Bibliografía	36

PARTE II (para niños en edad preescolar) páginas 40 - 77

Recomendaciones	78
-----------------------	----

Introducción

Este libro es más una publicación de la serie "Math&Art." preparada en la convención de la alfabetización visual. La principal forma de interesar a un niño por las matemáticas es jugar junto con un adulto y otros niños, con el objetivo de despertar el interés y el deseo de contar, medir, pesar, conocer figuras o razonar. Los libros anteriores de la serie estaban dirigidos principalmente a educadores que estudian la realidad educativa y a maestros de escuelas primarias y secundarias. Esta vez me dirijo a maestros, educadores, padres y abuelos de niños de edad preescolar. La edición electrónica del libro ha permitido ampliar el público también a los pequeños destinatarios - preescolares que aún no saben leer. La parte destinada a ellos se puede "leer" junto con el niño. La tarea del adulto es organizar el espacio educativo en base a las ideas esbozadas en las páginas de tal manera que permita al niño comprender la esencia del conteo, cálculo, conocimiento de figuras geométricas o desarrollo de la orientación espacial. Esta parte del libro ha sido enriquecida de las fotografías didácticas y grabaciones de audio, que se pueden escuchar en polaco, inglés o español.



Las propuestas incluidas en la publicación están destinadas a ubicarse en la llamada zona del desarrollo próximo del niño, que, siguiendo a Vygotsky, entiendo como la distancia entre el nivel actual y el nivel potencial del desarrollo del niño. El nivel actual es el resultado de ciclos de desarrollo completados. El nivel potencial se define por las funciones psíquicas que están en formación, influenciadas por la enseñanza, la imitación, otros contactos sociales y formas de actividad propia [1].

La tarea del adulto es apoyar el desarrollo individual del niño, entre otras cosas, adaptando las sugerencias de juegos y tareas a sus posibles capacidades. Por lo tanto, en lugar de pautas y recomendaciones didácticas, presento propuestas seleccionadas, cuya aplicación puede contribuir a un buen comienzo del niño en el mundo de las matemáticas.

Las fotografías incluidas en el libro tienen como objetivo provocar que el niño observe conceptos y regularidades matemáticas. También sirven como una guía pedagógica sobre cómo organizar el espacio educativo de un niño pequeño en su hogar, sin necesidad de costosos medios didácticos, juegos o juguetes. Formar conceptos matemáticos básicos y habilidades matemáticas básicas puede ser una maravillosa aventura. Un niño pequeño aprende jugando. Provocar asombro, interés y estimular al niño preescolar a hacer preguntas y formular hipótesis invita al niño a explorar objetos matemáticos.

Las actividades propuestas en el libro sobre el reconocimiento de figuras planas que son sombras o sellos (estampillas) de modelos tridimensionales son signos de actividades exploratorias. El niño percibe imágenes completamente nuevas como resultado de su propia manipulación de objetos conocidos (por ejemplo, una esponja de cocina, una zanahoria o una cebolla). Tales actividades, al involucrar nuevos estímulos en nuevas situaciones, satisfacen las necesidades cognitivas del niño [2]. Por otro lado, los juegos que involucran la imaginación infantil en la creación de nuevos arreglos, construcciones o imágenes hechas con sellos preparados por ellos mismos juegan un papel especialmente importante en el desarrollo de la imaginación espacial infantil [3]. Animo a los cuidadores y educadores de niños en edad preescolar a utilizar creativamente los regalos de la naturaleza (por ejemplo, castañas, bellotas o conchas marinas), vegetales durante la preparación de comidas, botones, cuentas, teatro de sombras casero.

El mejor juguete educativo puede estar al alcance de tu mano: los cubiertos en la cocina, que puedes usar para enseñar a clasificar, los platos que se colocan en el orden correcto, o los zapatos y guantes para reconocer el lado izquierdo y derecho. Los niños de 3 a 7 años inician juegos de construcción, que consisten en crear diversas construcciones con elementos como bloques, piedras, palos, arena [4]. Lo importante es dirigir hábilmente este juego para que se convierta en la base para formar intuiciones matemáticas adecuadas y conceptos básicos.



[1] „*Math & Art. Reprezentacje enaktywne w edukacji matematycznej – badania w działaniu*” / „*Math & Art. Enactive Representations in Math Education – Research in Action*” i „*Math & Art. Wizualne drogi do reprezentacji symbolicznych pojęć matematycznych / Math & Art: Visual ways to represent symbolic mathematical concepts*”.

[2] L. S. Wygotski, *Wybrane prace psychologiczne*, przeł. E. i J. Flesznerowie, PWN, Warszawa 1971, s.541

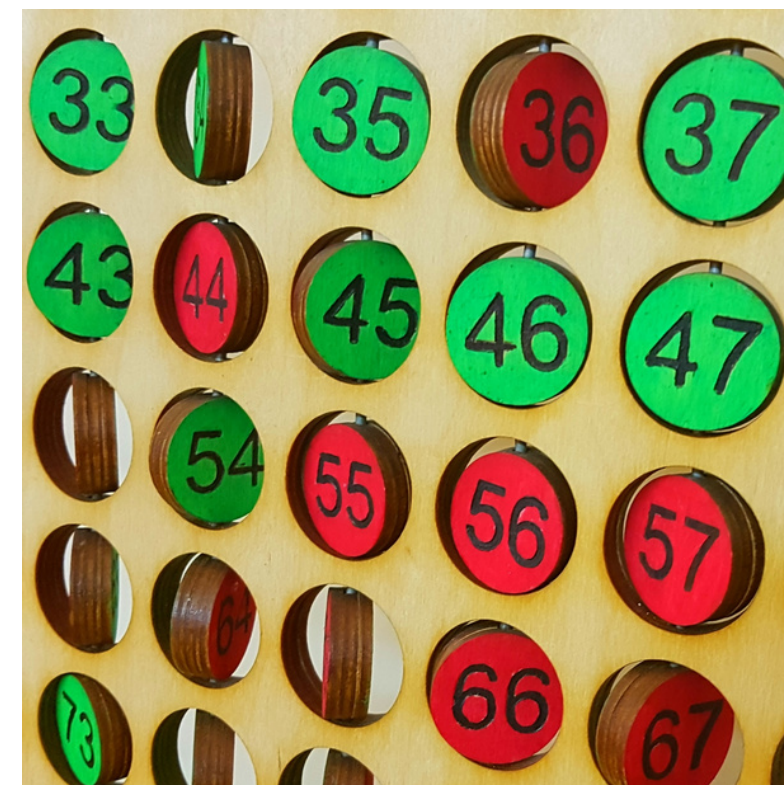
[3] M. Kielar-Turska, *Jak stymulować badawczą aktywność dziecka*, „*Wychowanie w Przedszkolu*”, nr 9/1987, s. 503.

[4] S. Szuman, *Psychologia wychowawcza wieku dziecięcego. Podręcznik dla matek i wychowawczyń w przedszkolach i domach dziecięcych oraz dla nauczycieli i studentów studiujących rozwój psychiczny dziecka*, Instytut Wydawniczy Nasza Księgarnia, Warszawa 1946, s. 83.

[5] M. Tyszkowa, *Aktywność i działalność dzieci i młodzieży*, Warszawa 1997, s. 68.

El conteo en edad preescolar

Número. Un objeto abstracto de las matemáticas que nos acompaña durante toda la vida. Describe el desarrollo biológico, cambios físicos, reacciones químicas, así como cambios sociales, medidas de longitud, masa, volumen, velocidad y miles de otras magnitudes. Gracias a los números, cuyo entendimiento asumimos como natural, podemos contar elementos de conjuntos (por ejemplo, tengo dos piernas, hay cinco manzanas en la cesta, el coche tiene cuatro ruedas), así como determinar el orden (por ejemplo, vivo en el segundo piso, quedé tercero en la carrera, en el teatro debo ocupar el octavo asiento de la segunda fila). La habilidad de contar hace que los ejemplos mencionados sean comprensibles y prácticos.



En el libro, no me adhiero estrictamente al currículo de educación preescolar en Polonia. Primero, porque espero que la publicación llegue a niños en otros países, y segundo, no creo que limitar o retrasar administrativamente/formalmente el alcance del aprendizaje matemático de un niño sea apropiado. Un preescolar generalmente entiende bien los números negativos: "mi papá estacionó el coche en el nivel menos dos del estacionamiento del centro comercial", "el anuncio verbal en el ascensor 'nivel cero' significa que estamos en la planta baja" o "hoy la temperatura ha bajado a menos cuatro grados, hay que abrigarse con un gorro y guantes porque hace frío". Disfruta nombrando números grandes, como contar 680 escalones durante una excursión a Szczeliniec (cima en las Montañas de la Mesa de los Sudetes). Supera los umbrales de decenas y cientos, aprendiendo inadvertidamente la estructura del sistema de numeración posicional. Nótese que, a diferencia de los sistemas aditivos (como el sistema romano), para comprender la notación posicional de los números, es necesario entender el doble papel del cero: como número y como indicador de la ausencia de elementos en un orden dado.

La habilidad de contar con fluidez en preescolares es fundamental para el desarrollo de habilidades de cálculo (realización de operaciones), organización, resolución de problemas basados en relaciones y regularidades numéricas. Un buen entendimiento de números y numerales proporciona al niño la base para codificar y cifrar información.



Los números marcan edificios y casas, cada persona tiene un código numérico asignado – número de identificación personal, y los padres retiran dinero del cajero automático después de insertar la tarjeta y proporcionar un código de seguridad – PIN numérico. Además, contar con fluidez sin limitar el rango ofrece la oportunidad de observar independientemente las regularidades en los sistemas de numeración posicional. También hace que el niño experimente armonía y un cierto tipo de orden y ritmo. El dominio de la habilidad de contar se basa en la comprensión y aplicación de ciertos principios publicados en la década de 1970. Son tan generales que permiten contar todos los objetos de la misma manera. A cada número se le asigna de manera inequívoca un nombre. Además, el orden de los objetos contados no importa, pero el orden de los numerales está fijado.

El numeral que aparece en el último lugar durante el conteo expresa el número de elementos en el conjunto [1]. Aplicando estos principios en el juego infantil que conduce al aprendizaje del conteo, contamos elementos del conjunto colocados uno detrás del otro, agrupados en pares, tríos, decenas o sin cambiar el orden de los elementos, pero al contar movemos con el dedo los elementos individuales de un lugar a otro. Al mismo tiempo, pronunciamos los siguientes numerales. Resulta (y esto es un descubrimiento infantil) que, independientemente de su posición, el número de elementos en el conjunto es el mismo.



Inculcar en el niño el razonamiento lógico y la expresión de sus pensamientos se desarrolla a lo largo de los años, basado en la estimulación diaria. Esto incluye tanto la provocación intencional y planificada (por ejemplo, durante la educación preescolar) como la espontánea, que puede ocurrir, por ejemplo, durante un paseo con abuelos.

Las visitas al cine o las actividades de sombras chinescas antes de dormir. Después de todo, la educación de los estudiantes más jóvenes debe entrelazar hábilmente el aprendizaje con el juego, para introducirlos suavemente en el mundo de la escuela [2].

Para enseñar a los niños a contar correctamente, son útiles las conversaciones durante las actividades cotidianas, por ejemplo, 'para la cena de hoy tendremos dos invitados, así que prepararemos dos cubiertos adicionales para abuelos' o al clasificar la ropa después de lavarla 'emparejamos los calcetines y los guardamos en el cajón'. La educación matemática en el hogar es un complemento indispensable para la educación preescolar programada, forma positivamente las relaciones entre compañeros y entre niños y adultos. También hace que los niños, al sentir la aplicación práctica, se inclinen naturalmente hacia el aprendizaje. Las regularidades matemáticas organizan toda nuestra vida, acompañan todas las tareas, trabajo, estudio, entretenimiento, e incluso emociones y sentimientos. Así que aprovechemos todas las oportunidades que surjan en nuestra vida para desarrollar gradualmente en el niño las intuiciones matemáticas correctas.

Andrzej Góralski, en el epílogo del libro de Bruno de Finetti, enfatizó que la acción pedagógica requiere una proporción de intelecto e intuición. Así que la cuestión es que los pedagogos dominen el oficio de desarrollar la intuición al mismo nivel que la habilidad de educar el intelecto [3]. El postulado expresado hace años sigue siendo relevante, especialmente dirigido a todos aquellos que contribuyen al desarrollo del pensamiento matemático en los niños. La introducción al desarrollo de intuiciones correctas y los llamados gérmenes de conceptos matemáticos, y por lo tanto, a alcanzar la madurez en el aprendizaje de las matemáticas por parte del niño, puede reducir las barreras en la educación matemática que ya aparecen en niños de pocos años, descritas por Edyta Gruszczyk-Kolczyńska [4]. Observemos que las dificultades excesivas de los alumnos en el aprendizaje de las matemáticas aparecen ya al inicio de la educación escolar y se manifiestan claramente en el cuarto año de la escuela primaria.



Las deficiencias acumulativas reemplazan la fascinación inicial del niño por la escuela y gradualmente se transforman en insatisfacción, decepciones, frustraciones y también en una aversión a largo plazo hacia las matemáticas. Como consecuencia de estos eventos negativos, se extingue sistemáticamente el interés y las habilidades, así como la acumulación de deficiencias cognitivas durante todo el ciclo educativo [5].

La aventura matemática cognitiva de un niño pequeño a menudo comienza con decir los nombres de los números, pero, como se sabe desde hace más de 70 años, los bebés, mediante la subitización, es decir, la percepción repentina y no aritmética de las diferencias en la cantidad de elementos en conjuntos de pocos elementos, diferencian conjuntos de 2 y 3 elementos [6]. El proceso de contar consciente y correctamente se desarrolla a través de una serie de actividades preparatorias, que incluyen, entre otras, la estimación.

Un niño pequeño primero capta las regularidades del ritmo, usa el gesto de señalar. Estos son gestos que, según Edyta Gruszczyk-Kolczyńska, presagian la capacidad de contar. El apuntar a un objeto por un niño que camina y explora objetos por sí mismo va acompañado de establecer relaciones entre objetos existentes y su representación mental, basada en: un gesto de señalar - un objeto real - una representación en la mente del niño. Este es el comienzo de la regla 'uno a uno' utilizada en el conteo [7]. El camino hacia un conteo correcto pasa por la etapa de repetición caótica por el niño (alrededor del cuarto año de vida) de números aleatorios como dos, siete, cuatro, ocho... Luego viene la comprensión del orden constante de los números y su asignación a elementos individuales del conjunto contado. Enfatizo aquí que, a pesar de los resultados publicados en 1999 por Brian Butterworth sobre el logro de habilidades aritméticas individuales por los niños hasta los 7 años [8], estos datos solo tienen un carácter orientativo. No constituyen normas de desarrollo [9]. Esto lo confirman los estudios de Edyta Gruszczyk-Kolczyńska que muestran diferentes niveles de habilidades de conteo de objetos en niños preescolares [10]. Por lo tanto, la segunda parte del libro, dedicada a los lectores más jóvenes, se distancia de establecer umbrales educativos específicos que un niño de 4, 5 o 6 años 'debería' alcanzar. El libro, preparado en la convención de la alfabetización visual [11], tiene como objetivo guiar al joven lector hacia una observación y razonamiento conscientes, internalizando las regularidades percibidas a través de la extracción e interpretación de imágenes fotográficas. El propósito del libro oscila entre despertar la sensibilidad estética del niño, enfocada en pasar de una visión pasiva a una observación activa [12], y en formar un pensamiento matemático, cuyo sentido es la percepción razonable, el razonamiento, el análisis de procesos, la formulación y resolución de problemas [13]. Mi intención es también aportar, aunque sea modestamente, a la construcción del lenguaje contemporáneo de la comunicación matemática de los niños pequeños.

La larga experiencia docente, así como la experiencia en la preparación de futuros maestros de matemáticas en todos los niveles educativos, me anima a señalar imprecisiones comunes, e incluso errores, en el uso de la terminología básica relacionada con los números y el conteo. Como ya he mencionado, el número es un objeto abstracto, difícil de entender para un niño en la etapa preoperativa del desarrollo intelectual. La definición de un número natural como una unidad mental de muchas unidades [14] se refiere al conteo de elementos de un conjunto agregando otro elemento. El entendimiento del número natural, proveniente de Bertrand Russell y también de Friedrich Ludwig Gottlob Frege, como la potencia (número de elementos en un conjunto finito) lleva a asignar números a clases de conjuntos equinumerosos. Es decir, independientemente de lo que sean los elementos del conjunto, les asignamos una 'etiqueta' que informa sobre el número de estos elementos (cinco granos de arena, cinco manzanas, cinco caballos, cinco casas, etc.). En la etapa preoperativa, entender que un conjunto de cinco granos y un conjunto de cinco casas tienen la misma cantidad de elementos es un problema, ya que para el niño el tamaño y la extensión de los elementos habla más fuerte que su número. Por lo tanto, durante el aprendizaje del conteo, consideramos diferentes conjuntos de cosas que están cerca del niño. Cuando estamos en casa, pueden ser: cubiertos, vajillas, ropa, libros, juguetes, flores en las ventanas, zapatos, imágenes; durante un viaje: autos, bicicletas, postes, lámparas, escaleras; durante la jardinería: parterres, frutas, verduras; durante el juego: coches, muñecas, ositos de peluche.

Un papel particular en la formación de la forma en que los niños cuentan lo juega el conteo con los dedos. Es el primer y siempre disponible, generalmente no oculto bajo la ropa, medio didáctico utilizado tanto para determinar el número de elementos de un conjunto (por ejemplo, tres libros), como para dar el número ordinal que indica el orden de los objetos (por ejemplo, página cinco). Usamos los dedos para señalar, tocar y mover elementos individuales del conjunto contado. También son útiles para realizar operaciones básicas con números naturales.

Monika Szczygieł, Krzysztof Cipora y Mateusz Hohol describen los resultados de investigaciones que demuestran una buena correlación entre la habilidad de los niños para usar los dedos, nombrarlos y numerarlos, y sus altas habilidades matemáticas [15].

En el caso de conjuntos con un número pequeño de elementos, incluso sin la ayuda de los dedos o de otros conjuntos sustitutos, el niño cuenta los elementos en uno y otro conjunto. Si obtiene números iguales, significa que los conjuntos tienen la misma cantidad de elementos. Por ejemplo, dos zapatos y dos piernas, o cuatro platos para cuatro miembros de la familia. Resulta que el preescolar, incluso si su rango de conteo es (todavía) pequeño, es capaz de comprobar perfectamente la equivalencia de dos conjuntos, incluso si son muy numerosos. Establece una correspondencia de elementos de un conjunto con los elementos del otro conjunto. Podemos realizar este ejercicio en el parque durante un paseo otoñal: 'verifiquemos si tenemos la misma cantidad de castañas y bellotas', en la merienda: '¿hay tantas galletas como platos'? Durante el descanso en la playa, las piedrecitas y conchas invitan a jugar a la equivalencia. ¿Cómo verificar si tenemos la misma cantidad de conchas que de piedrecitas? Basta con poner una piedrecita en cada concha. Si alguna concha queda vacía, significa que había más conchas que piedrecitas.

El tema discutido, relacionado con la determinación del tamaño del conjunto, se presenta en la literatura como 'aspecto cardinal del número natural'. Dado que para muchos de mis estudiantes esta palabra no era completamente comprensible y se asociaba con la definición de 'error cardinal', me apresuro a explicar: el número cardinal de un conjunto finito es simplemente el número de sus elementos, por lo tanto, el aspecto cardinal se refiere a la cantidad de elementos en un conjunto.

Tanto las declaraciones públicas de personas conocidas como las conversaciones con estudiantes y maestros de preescolar me autorizan a hablar sobre dos conceptos: dígitos y números. No usemos descripciones incorrectas como: 'añadiré el dígito 5 al dígito 7', ni 'la asistencia de la clase 3A se expresa con el dígito 89%'. Así como en el idioma (y otros idiomas también) escribimos con letras, los números se escriben con dígitos, es decir, signos gráficos. En el sistema decimal posicional, cualquier número se puede escribir con diez dígitos: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, y en el sistema binario, con dos dígitos: 0 o 1. Los mismos dígitos, dentro de un mismo sistema de conteo (tomemos, por ejemplo, 3,4 y 7 en el sistema decimal) ordenados de manera diferente representan diferentes números, por ejemplo, 347, 374, 437, 473, 743, 734. Cada uno de ellos corresponde a un valor diferente. También notemos que el mismo número escrito en diferentes sistemas puede tener un valor diferente. Por ejemplo, 1101 en el sistema decimal significa 'mil ciento uno', mientras que interpretando el mismo número en el sistema binario es 'trece', porque $1+0+4+8=13$.

El proceso de conteo infantil se desarrolla en conexión con el aprendizaje del lenguaje. Aprender a leer y escribir, al igual que contar, implica codificar y decodificar información. El lenguaje matemático se considera uno de los componentes más importantes de la cultura matemática del estudiante [16]. Alexandre V. Borovik y Tony Gardiner [17] destacan la relación duradera entre la adquisición de habilidades matemáticas básicas y el desarrollo del lenguaje matemático. Este tema acompañará las consideraciones sobre el desarrollo de la orientación espacial del niño y la comprensión de figuras planas y espaciales en el libro.



- [1] R. Gelman, C. Gallistel, *The child's understanding of number*. Publishing Harvard University Press, Cambridge, 1978.
- [2] Z. Marciniak, *O potrzebie reformy programowej kształcenia ogólnego*, Podstawa programowa z komentarzami Tom 6. Edukacja matematyczna i techniczna w szkole podstawowej, gimnazjum i liceum. Matematyka, zajęcia techniczne, zajęcia komputerowe, informatyka, s. 9.
- [3] A. Góralski, Postłowie do: B. de Finetti, *Sztuka widzenia w matematyce*, PWN, Wrocław 1983, s. 189-190.
- [4] E. Gruszczyk – Kolczyńska, *Diagnoza kryzysu w matematycznym kształceniu dzieci oraz rekomendowane działania naprawcze*, Opinia dla Najwyższej Izby Kontroli, <https://www.nik.gov.pl/plik/id,19329,vp,21937.pdf>.
- [5] M. Makiewicz, *Opinia w przedmiocie diagnozy problemów związanych z procesem nauczania matematyki w szkole (począwszy od IV klasy szkoły podstawowej) wraz z odpowiednimi rekomendacjami*, Opinia dla Najwyższej Izby Kontroli, <https://www.nik.gov.pl/plik/id,19330,vp,21938.pdf>.
- [6] E.L. Kaufman, M. W. Lord, T.W. Reese, J. Volkmann, *The discrimination of visual number*. American Journal of Psychology, 1949, 62, s. 498-525.
- [7] E. Gruszczyk – Kolczyńska, *Dziecięca matematyka – dwadzieścia lat później. Książka dla rodziców i nauczycieli starszych przedszkolaków*, Bliżej przedszkola, Kraków 2015, s. 53.
- [8] B. Butterworth, *The Mathematical Brain*, Macmillan, London, 1999.

- [9] U. Oszwa, *Rozwój i ocena umiejętności matematycznych dzieci sześciolatków*, W; Doradca nauczyciela sześciolatków, z. 7, 2006, s.4 -5.
- [10] E. Gruszczyk – Kolczyńska, *Dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki*, WSiP, Warszawa 1997, s.26.
- [11] S. Dylak, *Alfabetyzacja wizualna jako kompetencja współczesnego człowieka*, w: Media. Edukacja. Kultura. W stronę edukacji medialnej, W. Skrzydlewski, S. Dylak (red.), Polskie Towarzystwo Technologii i Mediów Edukacyjnych, Poznań-Rzeszów 2012, s. 126-127.
- [12] P. Sztompka, *Wyobraźnia wizualna i socjologia*, w: *Fotospołeczeństwo. Antologia tekstów z socjologii wizualnej*, red. M. Bogunia-Borowska, P. Sztompka, Kraków 2012, s. 28.
- [13] J. Mason, L. Burton, K. Stacey, *Matematyczne myślenie*, Warszawa 2005, s. 6.
- [14] L. Jeleńska, A. M. Rusiecki, *Metodyka arytmetyki i geometrii w pierwszych latach nauczania*, PZWS, Warszawa, 1957, s. 10.
- [15] M. Szczygieł, K. Cipora, M. Hohol, *Liczenie na palcach w ontogenezie i jego znaczenie dla rozwoju kompetencji matematycznych*, PSYCHOLOGIA ROZWOJOWA, 2015 , tom 20, nr 3, s. 23–33.
- [16] M. Makiewicz, *O fotografii w edukacji matematycznej. Jak kształtować kulturę matematyczną uczniów?* SKNMDM US, Szczecin 2013.
- [17] A.V. Borovik, T. Gardiner, *Mathematical Abilities and Mathematical Skills*, World Federation of National Mathematics Competitions Conference, Cambridge 2006.015 * tom 20, nr 3, s. 28.



Orientación espacial en preescolares

En la educación matemática, una buena imaginación espacial juega un papel especial. Su adecuado desarrollo condiciona no solo el éxito en el aprendizaje de las matemáticas, sino también la habilidad de moverse en terrenos desconocidos, la comunicación y la capacidad de identificar problemas, plantear preguntas y seguir un camino hacia las respuestas. La imaginación, según Théodule Ribot, es un proceso de creación gradual de imágenes que son equivalentes a movimientos [1]. Barbara Rabijewska atribuye a las imágenes un rol de recuerdos almacenados en la conciencia independientemente de la presencia directa de los objetos [2]. Antoni Pardała define la imaginación espacial como la capacidad dinámica de generar activamente imágenes que reflejen formas espaciales, planas y lineales, así como la habilidad de transformar estas imágenes a través de operaciones mentales [3].



Estimular la creación y desarrollo de imágenes infantiles se logra a través de juguetes, medios didácticos aplicados, pero también mediante la modulación de la voz o la presentación de imágenes. Estos medios tienen como objetivo provocar la actividad infantil como resultado de un desequilibrio y conflicto cognitivo [4]. La imaginación es un proceso sin el cual no se puede hablar de una percepción y denominación adecuada de figuras espaciales, determinación de relaciones y conexiones en estas figuras, diseño o resolución de tareas espaciales de optimización. Por lo tanto, es necesario en todos los niveles de comprensión de conceptos matemáticos descritos por Pierre van Hiele [5]: visual, en el que el estudiante ve figuras de manera holística, las distingue por forma, posición, orientación; descriptivo, en el que el estudiante analiza las figuras aprendidas, generaliza asignando nombres, descubre sus propiedades, las ordena; y lógico, que incluye la organización de propiedades de las figuras y el diseño. Estos niveles corresponden completamente a las etapas del desarrollo intelectual de Jean Piaget.

Una orientación espacial bien formada en el período preoperatorio es la base para el desarrollo de la imaginación espacial del estudiante. También juega un papel especial en términos de un mayor desarrollo de las habilidades matemáticas, facilitando la comprensión de conceptos y el aprendizaje en otras áreas de las matemáticas, más allá de la aritmética. [8] Por eso son tan importantes las actividades pedagógicas que lo apoyen. En particular, el nivel visual corresponde al período de operaciones preoperatorias. En esta etapa, que dura desde el final del segundo año de vida hasta el final del período preescolar [6], el niño puede referirse a experiencias anteriores, hablar sobre ellas, imitarlas, conocer el mundo circundante a través de la acción. Sin embargo, las actividades concretas son irreversibles en este período, los niños no pueden revertir mentalmente a la situación original a través de una acción inversa (...) Una característica de este período es el pensamiento intuitivo, y el razonamiento se basa principalmente en la percepción, que considera solo un aspecto de la situación o evento, sin tener en cuenta otros al mismo tiempo [7].

Una bien desarrollada orientación espacial en el período preoperatorio es la base para el desarrollo de la imaginación espacial del estudiante. También juega un papel especial desde el punto de vista del desarrollo de habilidades matemáticas adicionales, facilitando la comprensión de conceptos y el aprendizaje en otras áreas de las matemáticas más allá de la aritmética [8]. Por lo tanto, es importante el apoyo pedagógico en este ámbito. Los niños en edad preescolar se caracterizan por lo que se conoce como egocentrismo, que incluye, entre otras cosas, la dificultad de ver y considerar el punto de vista de otra persona [9].



Los niños preescolares distinguen mejor las definiciones de cambio de posición: 'arriba, abajo, adelante, atrás' que indicar el lado izquierdo y derecho [10].

Dado que la comprensión de la orientación de otros objetos presenta una dificultad seria para los preescolares, para superarla propongo primero consolidar la estructura del propio cuerpo y la posición de otros objetos en relación con uno mismo. Este es el primer paso hacia el desarrollo de una orientación espacial correcta en el niño, que precede a la educación en la diferenciación de figuras geométricas, la comprensión de medidas y la capacidad de realizar transformaciones [11]. El conocimiento de la estructura del propio cuerpo va acompañado de juegos, canciones, poemas y danzas, donde se muestran manos, pies, cabeza, rodillas, talones, manos, orejas, boca, nariz.



El niño combina el reconocimiento de partes específicas de su cuerpo con señalar, dar funciones y nombrar y contar correctamente - 'tengo dos manos, dos piernas, cinco dedos en cada mano'. La buena comprensión de direcciones (frente, atrás, lado) se complica cuando necesitamos indicar el lado derecho o izquierdo. Reconocer y nombrar el lado izquierdo y derecho propio se puede ayudar con marcas de colores - calcetines de colores (por ejemplo, rojo en el pie derecho, azul en el izquierdo). Algunos adultos, al enseñar a los niños a reconocer su izquierda y derecha, les pegan algún tipo de marca en un lado. Puede ser, por ejemplo, un lazo o una pegatina. Por razones alérgicas y estéticas, no recomiendo marcar la mano del niño con rotuladores, pinturas o bolígrafos. Un desafío interesante, aunque no fácil, es reconocer la mano o pie derecho o izquierdo, un guante, un zapato, una huella en la nieve, una huella dejada por tocar un espejo empañado. Una tarea un poco más difícil es reconocer la mano derecha e izquierda de otra persona 'al tacto', con los ojos cerrados. El tacto es un sentido importante, cuyo rol reconocen los educadores, quienes proponen a los niños ejercicios para nombrar figuras espaciales conocidas que se encuentran en una bolsa opaca.

Otro buen ejercicio es el desfile popular entre los niños, que consiste en girar o moverse en una dirección determinada anunciada en forma de orden, por ejemplo, 'a la derecha, al frente, dos pasos adelante, marcha'. Emitir órdenes como 'levanta la pierna izquierda', 'toca la oreja derecha', 'salta en la pierna derecha', al igual que en el desfile, funciona muy bien si los adultos y los niños se turnan para dar las órdenes. Después de tales ejercicios, el niño desarrollará fácilmente su punto de referencia. Las experiencias con espejos, reflejos en la superficie de un lago o charco, o la observación de compañeros de pie al lado y frente a frente, provocan ansiedad en los niños. Este es un momento educativo muy importante. La incertidumbre expresada en la declaración: 'Cuando Jacek está a mi lado, nuestras pies derechos están en el mismo lado. Derecho. Pero cuando Jacek está frente a mí, su pie derecho está a mi izquierda' es un paso hacia una mejor comprensión del concepto. Dominar, por parte del niño, el reconocimiento de la derecha y la izquierda de una persona frente a él es un paso intermedio con respecto a la aplicación de cualquier punto de referencia establecido. Bien se demuestran eficaces aquí las alfombras con coches, bloques o maquetas que representan obstáculos, como montañas, casas coloridas, jardines o granjas. Sirven para realizar el estudio de Jean Piaget sobre la habilidad de cambiar libremente el punto de referencia. Las respuestas del niño a preguntas del tipo: '¿qué ve la muñeca colocada a tu derecha, izquierda o frente a ti?' descritas y comentadas por Margaret Donaldson permiten determinar la dificultad del niño en darse cuenta del hecho de que lo que ve está relativizado según la posición que ocupa [12].

Bronisław Ročławski señala la particularmente importante relación entre el buen aprendizaje de matemáticas por parte de los preescolares y el desarrollo de un lenguaje materno correcto. Una buena comprensión del sentido de las palabras pronunciadas refuerza la comprensión de conceptos, permite una comunicación bidireccional y expresa ideas propias. 'En el lenguaje natural se puede observar un juego específico entre lógica e intuición, análisis y construcción, generalización e individualización. Esto refleja la belleza de un mundo que no es completamente lógico ni completamente intuitivo. (...) Todo matemático admitirá que no hay matemáticas sin lenguaje' [13].

Una comprensión correcta del sentido de las preposiciones de lugar, que son partes invariables del discurso, es una condición importante para una buena comunicación y la formación correcta de la orientación espacial. Resulta que incluso los niños de pocos años se manejan bien con esto. Aquí funcionan bien ejercicios como 'di dónde está el oso'. El niño, mirando una puesta en escena/imagen/fotografía, responde: 'el oso está en la caja', 'el oso está debajo de la caja', 'el oso está delante de la caja', 'el oso está detrás de la caja', 'el oso está encima de la caja', 'el oso está al lado de la caja'. Es bueno combinar la operación de reconocer y nombrar preposiciones con un juego de colocar al oso según instrucciones: 'pon el oso delante de la caja', 'pon el oso detrás de la caja', 'pon el oso debajo de la caja', 'pon el oso encima de la caja', 'mete al oso en la caja', etc.



Este es un acto destinado a despertar las actividades matemáticas básicas del estudiante formuladas por Kazimierz Skurzyński [14]. Es bueno si preparamos una trama para este juego, por ejemplo, queremos empacar un regalo - un oso en una caja. Observamos que la ubicación del juguete en relación con la caja no es inequívoca. La afirmación 'el oso está al lado de la caja' se aplica tanto a la posición a la izquierda como a la derecha. Gracias a las preposiciones, podemos determinar fácilmente la ubicación de un objeto en relación con otros - por ejemplo, 'el perro está debajo de la mesa', 'hay un libro sobre el escritorio', 'hay un felpudo frente a la puerta', 'hay un basurero detrás de la casa', 'la boca está debajo de la nariz', 'tengo un reloj en la muñeca', 'hay una lámpara colgando sobre la cabeza'. La preposición 'entre' define la ubicación de un objeto en relación con otros dos - por ejemplo, 'entre el anillo rojo y el azul del juguete gusano hay un anillo amarillo', 'entre los ojos de una persona está la nariz' o 'entre el cuchillo y el tenedor hay un plato'.

Solo después de un buen dominio de la comprensión de la ubicación de objetos visibles, el niño comenzará a usar preposiciones al definir la organización rítmica del tiempo 'entre martes y jueves está miércoles' o 'entre febrero y abril está marzo'. Durante el aprendizaje de contar, aparece una preposición relacionada con la ubicación de un número en el eje numérico 'entre el seis y el ocho está el siete'.

Al formar habilidades para entender la ubicación de unos objetos en relación con otros, es importante la atractividad de los ejemplos utilizados. Deben referirse a situaciones cotidianas con las que el niño se encuentra en casa, en la guardería, durante un paseo o en la tienda. Por ejemplo, los siguientes mensajes pronunciados en un supermercado se vuelven claros y comprensibles para el niño: 'los snacks para gatos están en el segundo pasillo a la izquierda, detrás de los productos de limpieza', 'frente al estante de pan están los estantes de mermeladas' o 'los helados están en el refrigerador, a la izquierda de las frutas congeladas'.



Durante la lectura conjunta de materiales gráficos (ilustraciones, dibujos, carteles, gráficos), el niño practica la comprensión correcta de la posición de los elementos individuales en la imagen. Describe: 'en el centro hay una casa, encima de ella vuela un pájaro, al lado crece un árbol. En el árbol hay dos ardillas. En la esquina superior izquierda se ve el sol, y a la izquierda de la casa hay un cobertizo. El perro está sentado en el cobertizo'. La siguiente etapa es dibujar, pintar o construir bloques basados en instrucciones verbales. Por ejemplo: 'dibuja un árbol de Navidad compuesto por tres triángulos verdes y un tronco rectangular. En el triángulo inferior, marca tres círculos rojos, en el medio - tres púrpuras, y en el superior - tres azules. Dibuja una estrella amarilla en la cima del árbol.

Debajo del árbol, a la derecha, dibuja una caja rosa con un lazo púrpura'. Al realizar esta tarea, el niño debe organizar su espacio en una hoja de papel rectangular.

Es importante primero pronunciar lentamente toda la instrucción, y luego repetirla lentamente, dando suficiente tiempo para la acción del niño. Los niños pequeños a menudo comienzan el dibujo desde el borde del papel. Deben planificar espacio para la estrella (encima del triángulo superior) y un lugar para dibujar la caja, debajo del inferior. En lugar de pintar o dibujar con crayones, primero se pueden usar elementos prefabricados cortados de papel de colores, sellos o etiquetas adhesivas. También se puede utilizar una pantalla táctil o una pizarra interactiva.

Fomentar una buena orientación espacial es un gran juego. Tanto para el niño, como para el educador y cuidador creativo. Buscar 'tesoros' en una hoja de papel cuadriculada, jugar a esconder un oso en una caja o describir la ropa de una muñeca será atractivo y educativo para el niño".



- [1] T. Ribot, *O wyobraźni twórczej. Studium psychologiczne*, „Głos”, Warszawa 1900, s. 9.
- [2] B. Rabijewska, *Wprowadzenie do niektórych zagadnień dydaktyki matematyki. Przewodnik po literaturze. Zagadnienia ogólne*, Uniwersytet Wrocławski, Wrocław 1980.
- [3] A. Pardała, *Wyobraźnia przestrzenna uczniów w warunkach nauczania szkolnej matematyki. Teoria, problemy, propozycje*, Wydawnictwo Oświatowe FOSZE, Rzeszów 1995, s. 66.
- [4] J. Piaget, *Narodziny inteligencji dziecka*, PWN, Warszawa 1966, s. 12.
- [5] R.M. Corberan, P. Huerta, J. Margarit, A. Penas, E. Ruiz, *Didactica de la geometria: modelo van Hiele*, Universitat de Valencia, Valencia 1989, s. 15.
- [6] W. Nowak, *Konwersatorium z dydaktyki matematyki*, PWN, Warszawa 1989, s. 50.
- [7] H. Siwek, *Czynnościowe nauczanie matematyki*, WSiP, Warszawa 1998, s. 37.
- [8] U. Oszwa, *Rozwój i ocena umiejętności matematycznych dzieci sześciolatków*, W; Doradca nauczyciela sześciolatków, z. 7, 2006, s.27.
- [9] A. Birch, T. Malim, *Psychologia rozwojowa w zarysie. Od niemowlęcia do dorosłości*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2002, s. 43.
- [10] H. Moroz, *Rozwijanie pojęć matematycznych u dzieci w wieku przedszkolnym*, WSiP, Warszawa, 1983, s. 21-22.
- [11] B. Bilewicz – Kuźnia, *Rozwijanie umiejętności matematycznych dzieci w wieku przedszkolnym*. Wydawnictwo UMCS, Lublin 2018, s. 108.
- [12] M. Donaldson, *Myślenie dzieci*, przeł. A. Hunca-Bednarska, E.M. Hunca, Wiedza powszechna, Warszawa 1986, s. 20-21.
- [13] B. Roślowski, *O związkach nauczania matematyki z nauczaniem języka w wychowaniu przedszkolnym i wczesnoszkolnym*. Glottispol sp. Z o.o. Gdańsk 2012, s. 59.
- [14] K. Skurzyński, *Niektóre metody rozwijania matematycznej aktywności uczniów*, WNUS, Szczecin 1997, s. 23-34.

Introducción a la geometría para preescolares. Figuras geométricas planas y espaciales.

La diferencia más importante entre número y espacio es que el espacio nos parece algo menos abstracto y menos fundamental que el número.

Alfred North Whitehead

Geometría. Una de las siete artes liberales. Como decía Platón, "atrae el alma hacia la verdad y genera un modo de pensar digno de un filósofo, ya que eleva nuestra vista de lo bajo a objetos más elevados" [1]. La geometría surgió del problema de medir la tierra. Bajo el nombre de profesión "geómetra" se esconde una persona que mide terrenos y prepara mapas y planos. Por ejemplo, un geómetra podía usar una cuerda con nudos uniformemente atados para marcar un terreno rectangular. Para captar un ángulo recto, utilizaba el teorema inverso al de Pitágoras y el modelo del triángulo egipcio.

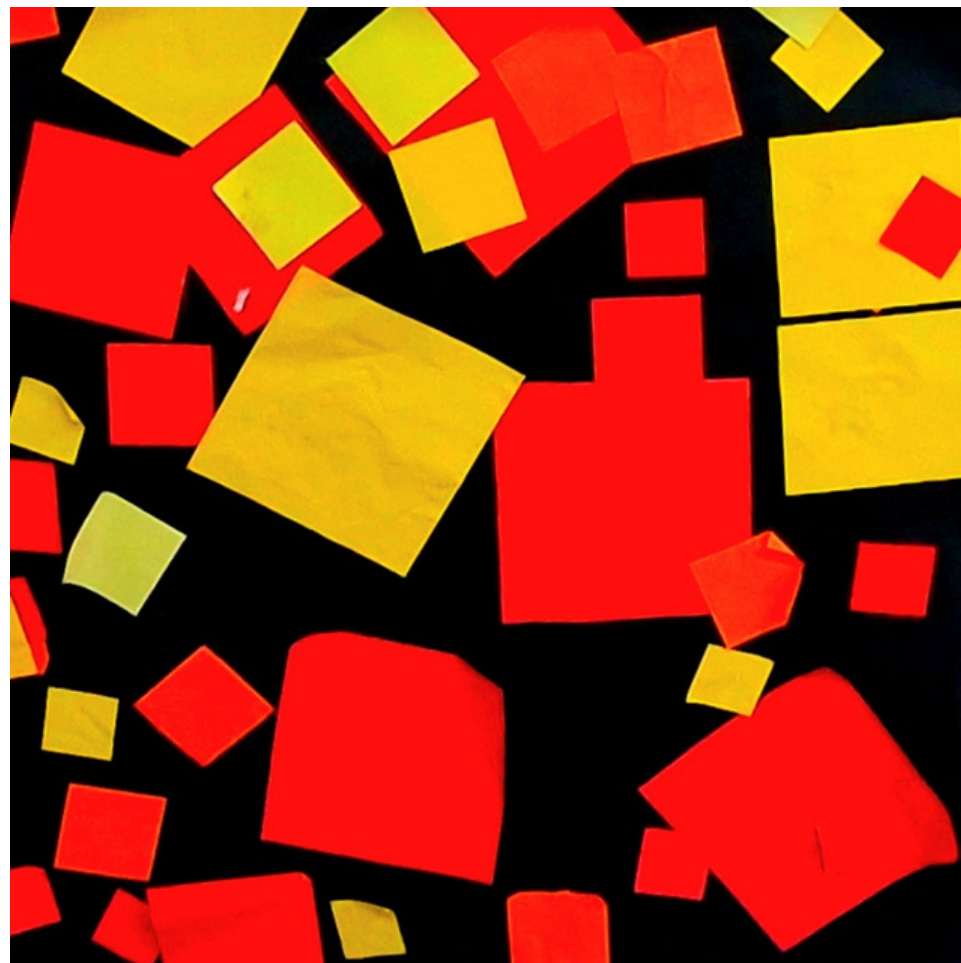
La geometría moderna se ocupa de problemas que combinan el entendimiento de figuras planas y espaciales con álgebra, topología, combinatoria. La geometría es particularmente importante, desde el punto de vista de formar la imaginación y la sensibilidad hacia la forma y estructura, en la educación matemática escolar. Sorprendentemente, es apreciada por los niños, aunque no necesariamente por los maestros. La enseñanza de la geometría en edad preescolar implica principalmente: la captación del niño de la forma de una figura a nivel visual (identificar y nombrar objetos, por ejemplo, esféricos), la distinción de las propiedades de la figura a nivel descriptivo (por ejemplo, un cubo tiene caras idénticas, son seis y cuadradas) y el examen lógico de las relaciones entre las propiedades (por ejemplo, ¿cuánto aumentará el área de un cubo si se añade otra cara?). Investigaciones experimentales realizadas por Urszula Szuścik han demostrado que en niños de edad preescolar y en la primera infancia se puede formar la percepción visual y estimular su creatividad artística.

Estos estudios [2] han establecido la base para la creación de un nuevo concepto pedagógico, la estimulación de actividades artísticas en niños y también la provocación de descubrimientos en geometría elemental a través de las "cualidades visuales" (color, línea y forma).

La geometría juega un papel importante en el desarrollo de la cultura matemática elemental [3] del niño, expresada en el fomento de la curiosidad y el interés, en la apreciación de la regularidad, la belleza, la elegancia y la armonía de los conceptos matemáticos básicos [4]. Desde hace muchos años sabemos que "las catedrales góticas y los templos dóricos son matemáticas transformadas en piedra" [5]. Comprender la geometría ayuda a ver las regularidades en la arquitectura, el arte decorativo, y los procesos sociales. También es un excelente "material" para formar el lenguaje matemático de la comunicación en la ciencia [6].

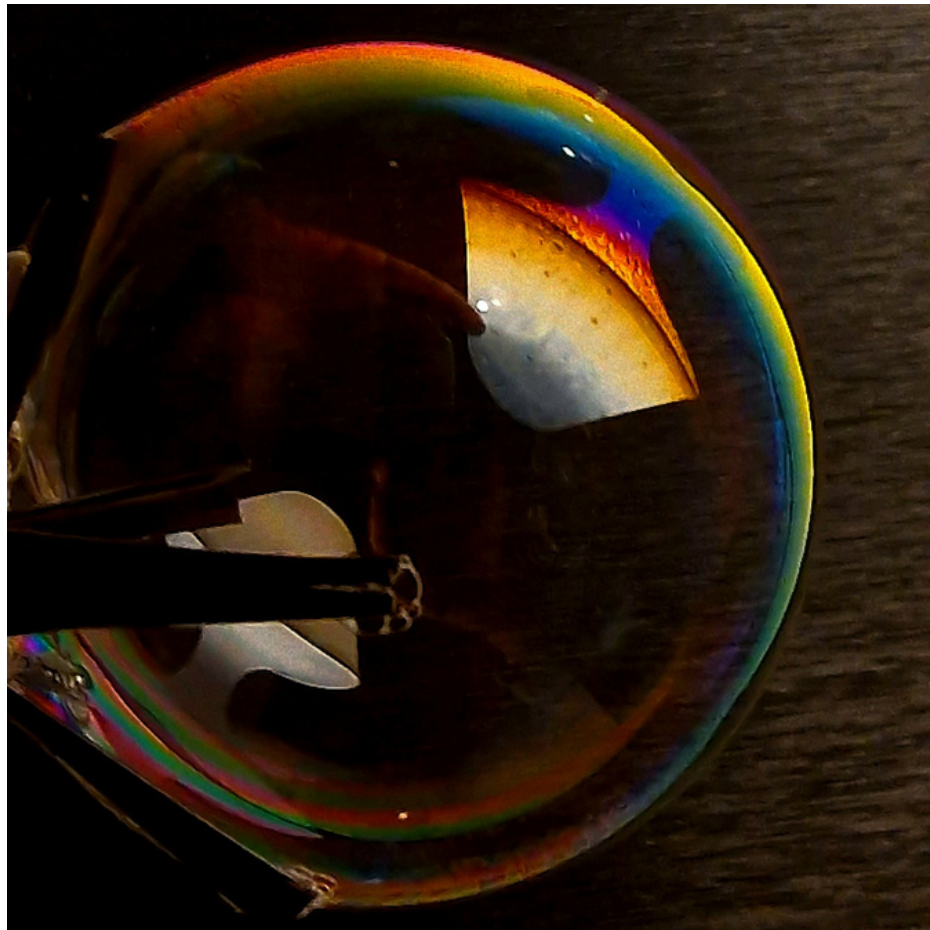
Un tema de investigación importante y actual es el análisis de la aversión y los bloqueos hacia las matemáticas que se presentan en los niños pequeños. Algunas de las causas de este fenómeno preocupante están relacionadas con el maestro. Estas son condiciones de conocimiento (conocimiento insuficiente de matemáticas), psicopedagógicas (conocimiento insuficiente del niño, de sus capacidades perceptivas en cada etapa de desarrollo) y metodológicas (relacionadas con la capacidad del maestro para diseñar bien el proceso educativo, incluida la definición de objetivos y la selección de métodos, formas y medios didácticos apropiados) [7]. Sin embargo, es importante destacar que la dificultad más grande está en superar la distancia que separa el modo de pensar del niño (basado en lo concreto sensorialmente conocible) y la esfera del razonamiento hipotético-deductivo llevado a cabo sobre objetos abstractos. [...] La singularidad de las matemáticas entre otras materias de enseñanza radica, entre otras cosas, en que sus objetos no se pueden percibir con los sentidos. Son invisibles, no tienen color, masa, olor, temperatura. Son de naturaleza abstracta y formal. En la vida cotidiana usamos representantes físicos de conceptos matemáticos [8].

La dificultad del conocimiento sensorial de las matemáticas, destacada hace más de cien años por el conocido matemático, físico y filósofo de Cambridge, Alfred North Whitehead, es notable: 'La geometría es una ciencia tan abstracta como cualquier otra rama de las matemáticas. Se ocupa del estudio de las formas y las posiciones relativas de las figuras, sin importar quién percibe los objetos y cómo los conoce: a través del oído, el tacto o la vista. [...] Observar ejemplos individuales de conos, esferas, cilindros y otras figuras ciertamente ayuda a nuestra imaginación, pero los teoremas de la geometría se aplican a todas las figuras de un cierto tipo, no solo a las que tenemos frente a nosotros en un momento dado' [9]. En la educación matemática de los niños pequeños, animo a utilizar métodos basados en razonamiento reductivo enraizado en representaciones sensoriales [10]. Son una base indispensable para indagaciones heurísticas que reemplazan o complementan las estrategias deductivas clásicas. Recordemos que no se debe dar explicaciones formales basadas en la lógica a un niño demasiado pronto, ya que es completamente ajena a la mente infantil (hasta cierta edad), y sus implicaciones son estériles para él [11].



Durante una visita a un jardín de infantes español, observé un tablero con notas adhesivas en forma de cuadrados. De diferentes tamaños y colores, pegados en varios ángulos. La saturación con diferentes representaciones de la idea de 'cuadrado' tenía como objetivo acercar a los niños a las características esenciales de este concepto. Waclaw Zawadowski enfatiza que las matemáticas comienzan donde el niño empieza a distinguir un triángulo (concebido) de un objeto en forma de triángulo [12]. Soy escéptica de la idea comúnmente aceptada de enseñar a los niños a distinguir entre rectángulos y cuadrados como categorías separadas. Aunque los nombres de estas figuras se mencionan uno al lado del otro en el currículo polaco, es importante considerar el riesgo de que los niños no comprendan las relaciones correctas entre un cuadrado y un rectángulo.

Este riesgo se relaciona con la construcción de categorías por parte del niño y el desarrollo de un razonamiento lógico correcto. Sugiero mencionar lo antes posible que un rectángulo cuyos lados tienen la misma longitud también tiene un segundo nombre: 'cuadrado'. En la educación matemática infantil, a menudo usamos la llamada definición ostensiva. Al introducir un concepto, evitamos formular una definición clásica; en cambio, al proporcionar una serie de ejemplos representativos, tratamos de enriquecer la idea del concepto. El número de ejemplos será suficiente cuando el niño pueda abstraer su pensamiento del color y tamaño de la figura, acercándose a las propiedades invariantes que permiten llamar a una figura un cuadrado o un triángulo.



En la introducción de los niños al mundo de las matemáticas, no se les debe enseñar nada que se vaya a desmentir en el futuro. Esto es una tarea difícil, ya que, aunque digamos la verdad y solo la verdad, no siempre podemos presentarla toda... La característica espiral del currículo implica una reflexión repetida sobre el concepto, asociada con una aproximación gradual al abstracto matemático. Inicialmente, esta aproximación es 'gruesa', imprecisa, por ejemplo, al aprender el concepto de esfera, primero aparece una pelota o una bola, luego la cáscara de una naranja, luego una burbuja de jabón, cuya superficie es tan efímera y delgada que, combinada con su transparencia, puede considerarse una representación bastante decente de este concepto.

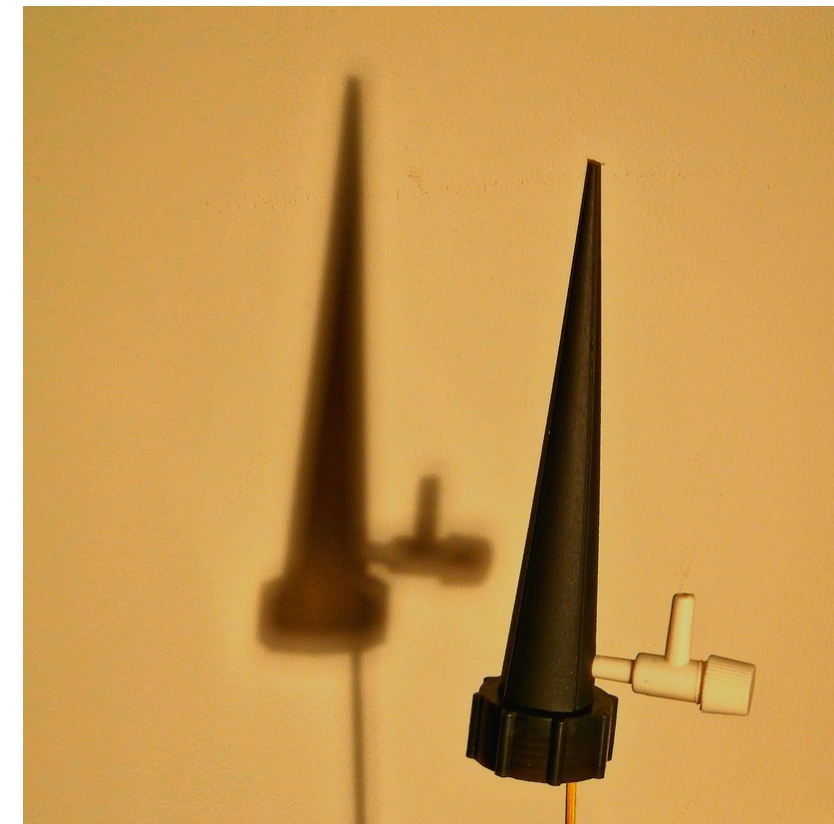
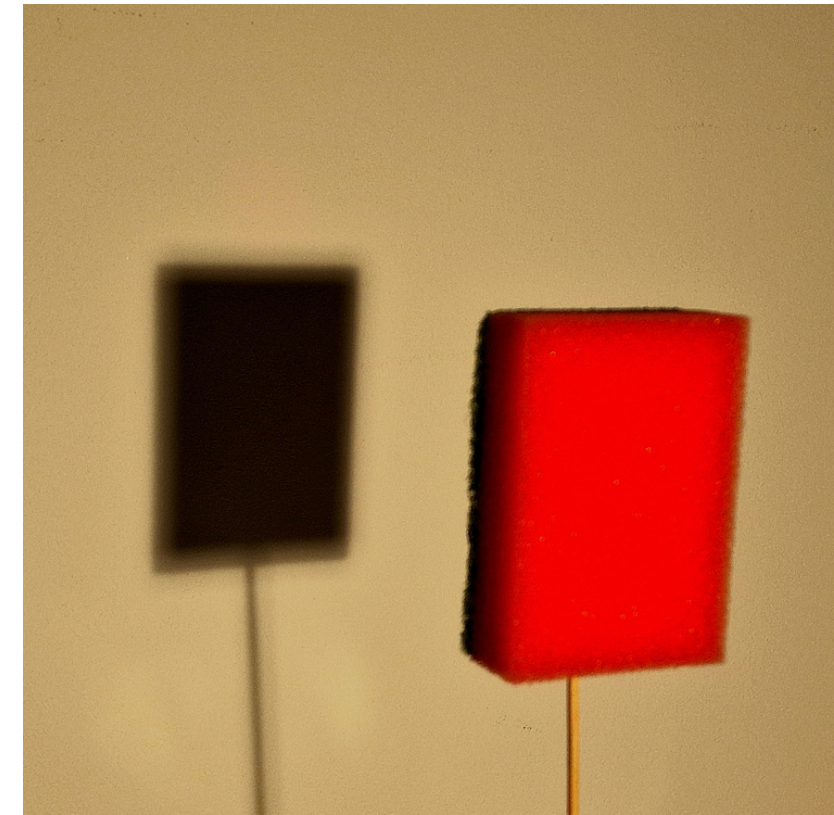
Una estrategia didáctica relativamente simple es invertir el orden en que los niños aprenden sobre las figuras geométricas. Creo que es incorrecto comenzar la educación infantil con el estudio de las figuras planas y luego pasar a las figuras espaciales. Esto contradice el principio de gradación de dificultad, ya que las figuras espaciales son simplemente más cercanas y comprensibles para los niños. Después de todo, se encuentran con ellas desde la infancia (sonajeros, pelotas).

Las figuras planas son inmateriales. No tienen grosor, no tienen masa, no se pueden tomar con la mano. Muchos investigadores, cuya pasión científica está arraigada en la práctica docente, representan una estrategia aparentemente invertida de pasar de figuras espaciales a planas. El proceso de abstracción de figuras planas y lineales de concretos tridimensionales ocurre [...] naturalmente y luego no es necesario explicar al niño que un cuadrado o un rectángulo que forma una cara de un cubo no tiene el grosor que tiene su modelo cortado de contrachapado, metal, cartón o papel [13]. La enseñanza inicial de la geometría debe estar relacionada con los sólidos, que son cercanos a los niños y más comprensibles que las figuras planas. Hay que recordar que el niño tiene una capacidad innata para la visión tridimensional. Por lo tanto, debe ser familiarizado desde el principio con varias figuras en el espacio tridimensional [14].

Vi cómo una maestra, queriendo mostrar a un niño la forma de un rectángulo, le enseñó una hoja de papel blanca. Recuerdo la reacción de un decidido alumno de segundo grado, quien protestó: 'mi mamá compró ayer 500 de estos rectángulos y ese paquete era pesado, tenía un grosor así' (mostrando con los dedos unos 5 cm). El niño acompañó a su madre durante la compra de papel para la impresora. Sus observaciones desencadenaron una mejor percepción de la 'espacialidad' de la hoja que la de la maestra. Por cierto, en mi práctica docente, tales comentarios, preguntas o reflexiones de mis alumnos siempre fueron valorados con elogios y altas calificaciones. Una estudiante me preguntó: '¿Cómo? ¿Una calificación por una pregunta hecha por un estudiante?'. Intenté que la futura maestra comprendiera, a través de este ejemplo, la increíblemente importante función de la calificación escolar, más allá de la verificación de los llamados resultados de aprendizaje, y que consiste en apoyar y alentar al estudiante a la atención y valentía cognitiva, a la actividad y curiosidad.

¿Cómo introducir a un niño en el mundo de las figuras planas cuando no se pueden tocar? Muchas personas utilizan para este propósito los bloques de Dienes. Al jugar de manera cognitiva con estos bloques de colores, recordemos el papel especial del adulto de apoyo y la prevención del riesgo de formación incorrecta de conceptos de figuras planas al nombrar prismas de poca altura. En este libro, presento dos métodos que he probado personalmente.

El primero está relacionado con el teatro de sombras. El juego de generar sombras proyectadas por figuras tridimensionales se puede realizar en casa, por ejemplo, por la noche antes de dormir. El juego no requiere de costosos materiales didácticos. Basta con una lámpara, una pared y algunos objetos con formas cercanas a un paralelepípedo, un cono o una esfera. En esta parte del libro dedicada al niño, en las fotografías se ven objetos de uso diario: una esponja para platos, un gorro de papel o una pelota que proyectan sombras planas en la pared con formas rectangulares, triangulares o circulares. La sombra, en mi opinión, es la mejor manera de mostrar una figura plana. La falta de color, así como de características materiales (grosor, masa), hace que esta representación sea casi ideal. Al apagar la fuente de luz, la imagen desaparece, pero se puede recrear después de un momento. La naturaleza interactiva del teatro de sombras matemático permite elegir objetos, su posición y distancia del proyector. El niño, a través de tales experiencias, percibe por primera vez la ambigüedad de la proyección. Identifica de manera independiente modelos de diferentes figuras tridimensionales que proyectan sombras idénticas (por ejemplo, un cilindro y un paralelepípedo que proyectan una sombra rectangular). De manera inconsciente (todavía), se encuentra con una función que no es unívoca. El juego de adivinanzas '¿qué figura proyectó una sombra determinada?' recuerda a la cueva de Platón, donde una pared de piedra es reemplazada por un proyector, y una fogata por una linterna o lámpara. Con el tiempo, las observaciones infantiles se cristalizarán hacia el conocimiento de las propiedades de la homotecia, las características de la similitud y la congruencia.



Proyectar en la cocina o el baño (donde hay azulejos rectangulares) puede resultar extremadamente educativo si el adulto guía adecuadamente el juego. La observación de sombras cuadradas, en un nivel más avanzado del juego, puede llevar a preescolares a descubrimientos originales: 'para cada cuadrado, se puede colocar un obstáculo cuadrado de tal manera que la sombra encaje exactamente con el azulejo cuadrado', lo que eventualmente lleva a la afirmación de que 'todos los cuadrados son similares' y 'hay ciertos rectángulos que de ninguna manera se pueden colocar para que las sombras coincidan con los azulejos rectangulares'.



En la espiral del conocimiento matemático infantil, ya en este punto surgen los gérmenes de conceptos matemáticos escolares posteriores, como proporciones, similitudes o isometrías. Tales observaciones infantiles pueden clasificarse como manifestaciones de creatividad tipo mini-t, que James Kaufman y Ronald Beghetto consideran un catalizador y guía para la creatividad cotidiana y excepcional [15].



Los descubrimientos infantiles tienen un fuerte matiz emocional y desencadenan una serie de ideas creativas que abarcan tanto los procesos cognitivos elementales (creatividad fluida) como las ideas que se cristalizan en forma de búsqueda de soluciones a problemas planteados, comprensión de su estructura, significado o contexto (creatividad cristalizada) [16]. Otra manera, también probada repetidamente por mí, de formar las percepciones infantiles sobre figuras planas son los sellos. En el libro, propongo un juego con sellos hechos de verduras o esponjas de cocina y pinturas al temple.

La forma natural de un corte de cebolla invita a hablar sobre el círculo, un paralelepípedo cortado de remolacha - sobre el rectángulo, y una zanahoria en forma de cilindro - sobre el círculo. Es un juego barato y accesible que puede acompañar la preparación de comidas. La esponja de cocina se puede adaptar rápida y fácilmente a la forma deseada. Sólo se necesitan tijeras e imaginación. Con estos sellos preparados, el niño crea sus propias composiciones multiplicando las impresiones de cada sello.

En ambos ejemplos presentados, he intentado capturar la transferencia descrita por Jean Piaget entre la manipulación de objetos reales y las actividades mentales. El niño pasa gradualmente de la actividad física, es decir, acciones sobre objetos materiales, a la actividad imaginativa, y luego a la actividad de tipo lógico-matemático, que se manifiesta en la capacidad de realizar operaciones, es decir, acciones mentales reversibles [17]. Ambas propuestas presentadas se caracterizan por ser fáciles y económicas de realizar. Son muy populares entre los más pequeños e invitan a una serie de modificaciones y actividades creativas.



[1] K. Skurzyński, *Co piszą o matematyce? Myśli, sentencje, aforyzmy*, W; M. Makiewicz (red.), *Matematyka – nasza niedostrzegalna kultura. Wypowiedzi, cytaty o kulturze matematycznej, matematyce i jej nauczaniu*. Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 2022, s. 39.

[2] U. Szuścik, *Sztuka i plastyka w nowoczesnym nauczaniu. W jakim stopniu sztuka jest potrzebna dziecku w kształtowaniu jego osoby i formowaniu go na przyszłość?* Akademia. Panorama. Edukacja. Magazyn Polskiej Akademii Nauk 3/67/2021, s. 22.

[3] M. Makiewicz, *Elementy kultury matematycznej w fotografii*, WNUS, Szczecin 2011, s.7.

[4] M. Makiewicz, K. Michalak, *Reflections on the Formation of a Child's Mathematical Culture at the Beginning of School Maturity*, Journal of Education, Technology and Computer Science No. 2(32)/2021, s. 34-44.

- [5] O. Spengler, *Der Untergang des Abendlandes. Umriss einer Morphologie der Weltgeschichte*, München 1923, s.84.
- [6] M. Makiewicz, *Language as a component of a student's mathematical culture. Dual coding of the path to understanding mathematical concepts using photography and text*, W: *Mathematik in Sprachen Europas. Linguistische Zugänge und interdisziplinäre Perspektiven* /M. Lisiecka-Czop, K. Sztandarska (red.), 2023, Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht Verlag, s.287-304.
- [7] J. Nowik, *Kształcenie matematyczne w edukacji wczesnoszkolnej*, Nowik, Opole 2009, s. 183.
- [8] M. Makiewicz, *Opinia w przedmiocie diagnozy problemów związanych z procesem nauczania matematyki w szkole (począwszy od IV klasy szkoły podstawowej) wraz z odpowiednimi rekomendacjami*, Opinia dla Najwyższej Izby Kontroli, <https://www.nik.gov.pl/plik/id,19330,vp,21938.pdf>
- [9] A.N. Whitehead, *Wstęp do matematyki*, przeł. Wł. Wojtowicz, Wydawnictwo Nakładem Księgarni E. Wende i Spółka, Warszawa – Lwów 1914, s. 212.
- [10] M. Makiewicz, *Rozważania o dwóch strategiach badawczych pedagogiki. Indukcyjny i dedukcyjny tok wnioskowania na przykładzie badań z zakresu kultury medialnej nastolatków*, *Lubelski Rocznik Pedagogiczny*, 2021, vol. 40, nr 3, s.61-78.
- [11] R. Duda, *Zasada paralelizmu w dydaktyce*, *Dydaktyka Matematyki I*, 1987, s. 131.
- [12] K. Skurzyński, *Co piszą o matematyce? Jak uczyć? Myśli, rady, zalecenia*, W; M. Makiewicz (red.), *Matematyka -- nasza niedostrzegalna kultura. Wypowiedzi, cytaty o kulturze matematycznej, matematyce i jej nauczaniu*. Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 2022, s. 45.
- [13] Z.M. Zimny, *Systemowe kształcenie matematyczne w klasach I-IV Szkoły Podstawowej*. Ramowy projekt programu autorskiego, Wydawnictwo WSP Częstochowa, Częstochowa 1996, s. 28-29.
- [14] J. Filip, T. Rams, *Dziecko w świecie matematyki*, Oficyna Wydawnicza IMPULS, Kraków 2000, s. 151.
- [15] W. Limont, *Uczeń zdolny. Jak go rozpoznać i jak z nim pracować*, GWP, Sopot 2010, p. 177.
- [16] E. Nęcka, *Psychologia twórczości*, Gdańskie Wydawnictwo Psychologiczne, Gdańsk 2001, s. 216-217.
- [17] J. Piaget, *Narodziny inteligencji dziecka*, przeł. M. Przetacznikowa, PWN, Warszawa 1966, s. 565.

Conclusión y presentación de la parte dedicada a los preescolares

El libro ha sido preparado siguiendo la convención del arte abierto. Su propósito es también invitar al lector a sus propias interpretaciones continuamente cambiantes. Para el adulto - a organizar situaciones didácticas y abrir los ojos de los niños a la matemática. Para los educadores - a reflexionar sobre los métodos contemporáneos de apoyar la educación matemática formal e informal del niño. Para el niño - a un juego creativo que trae nuevo conocimiento y habilidades.

El libro consta de dos partes: una dirigida a educadores, cuidadores, padres y tutores de niños en edad preescolar y otra parte pintada con luz y sonido, destinada a los lectores más jóvenes. He intentado combinar diferentes mensajes significativos de manera que mejor se adapten su contenido y forma al receptor específico. La distinta naturaleza de los signos en los mensajes parece diferenciar completamente los textos (por ejemplo, literarios y fotográficos), pero [...] resulta que se pueden encontrar estructuras análogas en ellos que atestiguan la comunidad de textos culturales en la esfera de la poética; estas estructuras permiten que los mensajes de diferentes medios interactúen [1]. El libro mantiene cierta distancia respecto a las publicaciones clásicas, que son lugares de reposo y estancamiento de las palabras [2]. Las fotografías y grabaciones incluidas en él, dedicadas a los niños preescolares, están destinadas a dirigir su percepción y enriquecer el campo interpretativo hacia la matemática. La multidireccionalidad y ambigüedad que acompaña a la interpretación de las fotografías está destinada a estimular la atención y alentar el esfuerzo interpretativo. Debe provocar la decodificación creativa de la información y llevar a una comprensión más profunda de los conceptos matemáticos. El uso de la voz del narrador y de muchas fotografías digitales en la formación propedéutica del pensamiento matemático del niño no es solo un ejemplo de organización de contenidos educativos. Es, teóricamente fundamentado, un ejemplo de la interacción de dos componentes de nuestra realidad: lo real y lo digital, conocido en pedagogía como educación complementaria [3]. La complementariedad también se puede interpretar en el movimiento constante entre las tres representaciones descritas por Jerome Bruner.

Las imágenes creadas a partir de actividades reales concretas proporcionan una estructura preconceptual que permite reconstruir clases cognitivas incluso a nivel preoperacional [4].

Los medios digitales actuales, gracias a Internet y la capacidad de grabación digital, permiten superar las barreras territoriales y temporales. Hoy llenan el espacio a nuestro alrededor. Traen consigo el riesgo de esclavitud y desinformación, pero al mismo tiempo ofrecen la oportunidad de una educación efectiva, adaptada a las necesidades del niño del siglo XXI. A menudo, el niño tiene un mejor conocimiento de los entresijos de la explotación de dispositivos electrónicos que sus padres. Los considera omnipresentes y obvios. Se siente seguro cuando está en línea. La fotografía digital es una forma extremadamente popular de interacción humana. Entre otros medios digitales, se distingue por su credibilidad y universalidad. Sirve para comunicar, documentar, retener y compartir con otros las emociones que acompañan a la percepción. La fotografía también es un medio didáctico multidimensional cuyas funciones y posibilidades he presentado en mi concepto didáctico llamado educación fotográfica matemática [6]. Este concepto no se centra solo en las fotografías, sino en la persona que las crea y las experimenta. Activa procesos mentales reproductivos y creativos, acerca conceptos y principios abstractos tanto a través de metáforas visuales como..."

[1] E. Szczęsna, Medios comparativos. Poética, semiótica, comunicación mediática, en: M. Dąbrowski (ed.), Estudios comparados para humanistas, Varsovia 2011, p.297.

[2] J. van Dijk, Aspectos sociales de los nuevos medios. Análisis de la sociedad red, traducido por J. Konieczny, Varsovia 2010, página 14.

[3] M. Tanaś, J. J. Czarkowski, La tecnología de la información en la perspectiva de las ciencias pedagógicas, Edukacja Zawodowa i Ukeeping No. 4/2019, p.110.

[4] J. Bruner, Cultura de la educación, trad. T. Brzostowska-Tereszkiewicz, Universitas, Cracovia 2010, págs. 214-216 [5] J. van Dijk, Aspectos sociales de los nuevos medios. Análisis de la Sociedad Red, trad. J. Konieczny, WN PWN, Varsovia 2010, página 14.

[6] M. Makiewicz, Acerca de la fotografía en la educación matemática. ¿Cómo moldear la cultura matemática de los estudiantes? SKNMDM Universidad de Szczecin, Szczecin 2013.

[7] Ibídem, página 205.

Bibliografia:

- B. Bilewicz-Kuźnia, *Rozwijanie umiejętności matematycznych dzieci w wieku przedszkolnym*. Wydawnictwo UMCS, Lublin 2018.
- A. Birch, T. Malim, *Psychologia rozwojowa w zarysie. Od niemowlęcia do dorosłości*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2002.
- A.V. Borovik, T. Gardiner, *Mathematical Abilities and Mathematical Skills*, World Federation of National Mathematics Competitions Conference, 2006.015 * tom 20, nr 3, Cambridge 2006
- J. Bruner, *Kultura edukacji*, przeł. T. Brzostowska-Tereszkiewicz, Universitas, Kraków 2010.
- B. Butterworth, *The Mathematical Brain*, Macmillan, London, 1999.
- R.M. Corberan, P. Huerta, J. Margarit, A. Penas, E. Ruiz, *Didactica de la geometria: modelo van Hiele*, Universitat de Valencia, Valencia 1989.
- J. van Dijk, *Spółeczne aspekty nowych mediów. Analiza społeczeństwa sieci*, przeł. J. Konieczny, WN PWN, Warszawa 2010.
- M. Donaldson, *Myślenie dzieci*, przeł. A. Hunca-Bednarska, E.M. Hunca, Wiedza powszechna, Warszawa 1986.
- R. Duda, *Zasada paralelizmu w dydaktyce*, Dydaktyka Matematyki I, 1987.
- S.Dylak, *Alfabetyzacja wizualna jako kompetencja współczesnego człowieka, w: Media. Edukacja. Kultura. W stronę edukacji medialnej*, W. Skrzydlewski, S. Dylak (red.), Polskie Towarzystwo Technologii i Mediów Edukacyjnych, Poznań-Rzeszów 2012.
- J. Filip, T. Rams, *Dziecko w świecie matematyki*, Oficyna Wydawnicza IMPULS, Kraków 2000.
- R. Gelman, C. Gallistel, *The child's understanding of number*. Publishing Harvard University Press, Cambridge, 1978.
- E. Gruszczyk – Kolczyńska, *Dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki*, WSiP, Warszawa 1997.
- E. Gruszczyk – Kolczyńska, *Dziecięca matematyka – dwadzieścia lat później. Książka dla rodziców i nauczycieli starszych przedszkolaków*, Bliżej przedszkola, Kraków 2015.
- E. Gruszczyk – Kolczyńska, *Diagnoza kryzysu w matematycznym kształceniu dzieci oraz rekomendowane działania naprawcze*, Opinia dla Najwyższej Izby Kontroli, 2018, <https://www.nik.gov.pl/plik/id,19329,vp,21937.pdf>.
- A. Góralski, *Postówie do: B. de Finetti, Sztuka widzenia w matematyce*, PWN, Wrocław 1983.
- L. Jeleńska, A. M. Rusiecki, *Metodyka arytmetyki i geometrii w pierwszych latach nauczania*, PZWS, Warszawa, 1957.
- E.L. Kaufman, M. W. Lord, T.W. Reese, J. Volkman, *The discrimination of visual number*. American Journal of Psychology, 1949, 62
- M. Kielar-Turska, *Jak stymulować badawczą aktywność dziecka*, Wychowanie w Przedszkolu, nr 9/1987.
- W. Limont, *Uczeń zdolny. Jak go rozpoznać i jak z nim pracować*, GWP, Sopot 2010.

- M. Makiewicz, *Elementy kultury matematycznej w fotografii*, WNUS, Szczecin 2011.
- M. Makiewicz, *O fotografii w edukacji matematycznej. Jak kształtować kulturę matematyczną uczniów?* SKNMDM Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 2013.
- M. Makiewicz, *Math & Art. Reprezentacje enaktywne w edukacji matematycznej – badania w działaniu*, SKNMDM Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 2018.
- M. Makiewicz, *Math & Art. Wizualne drogi do reprezentacji symbolicznych pojęć matematycznych*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 2021.
- M. Makiewicz, *Rozważania o dwóch strategiach badawczych pedagogiki. Indukcyjny i dedukcyjny tok wnioskowania na przykładzie badań z zakresu kultury medialnej nastolatków*, Lubelski Rocznik Pedagogiczny, 2021, vol. 40, nr 3.
- M. Makiewicz, *Language as a component of a student's mathematical culture. Dual coding of the path to understanding mathematical concepts using photography and text*, W: *Mathematik in Sprachen Europas. Linguistische Zugänge und interdisziplinäre Perspektiven* /M. LisieckaCzop, K. Sztandarska (red.), Vandenhoeck & Ruprecht Verlag, Göttingen 2023.
- M. Makiewicz, *Opinia w przedmiocie diagnozy problemów związanych z procesem nauczania matematyki w szkole (począwszy od IV klasy szkoły podstawowej) wraz z odpowiednimi rekomendacjami*, Opinia dla Najwyższej Izby Kontroli, 2018, <https://www.nik.gov.pl/plik/id,19330,vp,21938.pdf>.
- M. Makiewicz, K. Michalak, *Reflections on the Formation of a Child's Mathematical Culture at the Beginning of School Maturity*, Journal of Education, Technology and Computer Science No. 2(32)/2021.
- Z. Marciniak, *O potrzebie reformy programowej kształcenia ogólnego*, Podstawa programowa z komentarzami Tom 6. Edukacja matematyczna i techniczna w szkole podstawowej, gimnazjum i liceum. Matematyka, zajęcia techniczne, zajęcia komputerowe, informatyka. http://magdymatyka.rze.pl/dokumenty/matura/reforma_tom_6.pdf
- J. Mason, L. Burton, K. Stacey, *Matematyczne myślenie*, Warszawa 2005.
- H. Moroz, *Rozwijanie pojęć matematycznych u dzieci w wieku przedszkolnym*, WSiP, Warszawa, 1983.
- E. Nęcka, *Psychologia twórczości*, Gdańskie Wydawnictwo Psychologiczne, Gdańsk 2001.
- W. Nowak, *Konwersatorium z dydaktyki matematyki*, PWN, Warszawa 1989.
- J. Nowik, *Kształcenie matematyczne w edukacji wczesnoszkolnej*, Nowik, Opole 2009.

- U. Oszwa, *Rozwój i ocena umiejętności matematycznych dzieci sześciolatków*, W; Doradca nauczyciela sześciolatków, z. 7, 2006.
- A. Paradała, *Wyobraźnia przestrzenna uczniów w warunkach nauczania szkolnej matematyki. Teoria, problemy, propozycje*, Wydawnictwo Oświatowe FOSZE, Rzeszów 1995.
- J. Piaget, *Narodziny inteligencji dziecka*, przeł. M. Przetacznikowa, PWN, Warszawa 1966.
- T. Ribot, *O wyobraźni twórczej. Studium psychologiczne*, „Głos”, Warszawa 1900.
- Rabijewska, *Wprowadzenie do niektórych zagadnień dydaktyki matematyki. Przewodnik po literaturze. Zagadnienia ogólne*, Uniwersytet Wrocławski, Wrocław 1980.
- Roślowski, *O związkach nauczania matematyki z nauczaniem języka w wychowaniu przedszkolnym i wczesnoszkolnym*. Glottispol sp. Z o.o. Gdańsk 2012.
- H. Siwek, *Czynnościowe nauczanie matematyki*, WSiP, Warszawa 1998.
- O. Spengler, *Der Untergang des Abendlandes. Umriss einer Morphologie der Weltgeschichte*, München 1923.
- K. Skurzyński, *Niektóre metody rozwijania matematycznej aktywności uczniów*, WNUS, Szczecin 1997.
- K. Skurzyński, *Co piszą o matematyce? Jak uczyć? Myśli, rady, zalecenia*, W: M. Makiewicz (red.), *Matematyka – nasza niedostrzegalna kultura. Wypowiedzi, cytaty o kulturze matematycznej, matematyce i jej nauczaniu*. Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 2022.
- K. Skurzyński, *Co piszą o matematyce? Myśli, sentencje, aforyzmy*, W: M. Makiewicz (red.), *Matematyka – nasza niedostrzegalna kultura. Wypowiedzi, cytaty o kulturze matematycznej, matematyce i jej nauczaniu*. Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 2022.
- Szczęsna, *Komparatystyka mediów. Poetyka, semiotyka, komunikacja medialna*, w: M. Dąbrowski (red.), *Komparatystyka dla humanistów*, Warszawa 2011.
- M. Szczygieł, K. Cipora, M. Hohol, *Liczenie na palcach w ontogenezie i jego znaczenie dla rozwoju kompetencji matematycznych*, *Psychologia Rozwojowa*, 2015 , tom 20, nr 3, s. 23–33.
- P. Sztompka, *Wyobraźnia wizualna i socjologia*, w: *Fotospołeczeństwo. Antologia tekstów z socjologii wizualnej*, red. M. Bogunia-Borowska, P. Sztompka, Kraków 2012.
- S. Szuman, *Psychologia wychowawcza wieku dziecięcego. Podręcznik dla matek i wychowawczyń w przedszkolach i domach dziecięcych oraz dla nauczycieli i studentów studiujących rozwój psychiczny dziecka*, Instytut Wydawniczy Nasza Księgarnia, Warszawa 1946.

- U. Szuścik, *Kształtowanie percepcji wzrokowej jako stymulator działań plastycznych dzieci*. Chowanna 1995, 1, 26-31.
- U. Szuścik, *Bazgrota w twórczości plastycznej dziecka*. Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Śląskiego, Katowice 2019.
- U. Szuścik, *Sztuka i plastyka w nowoczesnym nauczaniu. W jakim stopniu sztuka jest potrzebna dziecku w kształtowaniu jego osoby i formowaniu go na przyszłość?* Akademia. Panorama. Edukacja. Magazyn Polskiej Akademii Nauk 3/67/2021.
- M. Tanaś, J. J. Czarkowski, *Techniki informatyczne w perspektywie nauk pedagogicznych*, Edukacja Zawodowa i Ustawiczna nr 4/2019.
- M. Tyszkowa, *Aktywność i działalność dzieci i młodzieży*, Warszawa 1997.
- A.N. Whitehead, *Wstęp do matematyki*, przeł. Wł. Wojtowicz, Wydawnictwo Nakładem Księgarni E. Wende i Spółka, Warszawa – Lwów 1914.
- K. Wojtowicz, *Filozofia matematyki J.S. Milla*, Przegląd Filozoficzny — Nowa Seria R. 15:2006, Nr 4 (60),
- D. Wood, *Jak dzieci uczą się i myślą. Społeczne konteksty rozwoju poznawczego*, przeł. R. Pawlik, A Kowalcze- Pawlik, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków 2006.
- L. S. Wygotski, *Wybrane prace psychologiczne*, przeł. E. i J. Flesznerowie, PWN, Warszawa 1971.
- Z. M. Zimny, *Systemowe kształcenie matematyczne w klasach I-IV Szkoły Podstawowej. Ramowy projekt programu autorskiego*, Wydawnictwo WSP Częstochowa, Częstochowa 1996

Recomendaciones

El libro de Małgorzata Makiewicz es una publicación interesante en el campo de las matemáticas, dedicada a los lectores jóvenes. De una forma atractiva desde el punto de vista visual y del contenido, la Autora introduce al lector en los temas y el desarrollo de las habilidades de contar, medir, pesar, conocer las figuras geométricas a través del juego. Se trata de un ejemplo de propuesta creativa e innovadora para la educación de un niño preescolar en el campo de las matemáticas. Este niño, junto con sus padres, profesor u otro tutor, aprende sobre contenidos matemáticos y los ve en su vida. Es una preparación para la futura educación escolar y también para la eliminación del miedo a las matemáticas o la incredulidad en sus propias capacidades y destrezas matemáticas. Los juegos visuales y matemáticos presentados y descritos en este libro moldean la personalidad del niño, sus emociones, su pensamiento y su enfoque creativo para encontrar soluciones en el juego matemático. La publicación inspirará tanto a padres como a profesores a realizar juegos matemáticos cognitivamente interesantes con los niños y, por tanto, con las matemáticas.

Prof. Urszula Szućik



En el libro "Math&Art. Mira, es matemática" la Autora, Małgorzata Makiewicz, hace búsqueda de la llave de oro que abre los corazones y las mentes de niños y jóvenes al conocimiento y las habilidades matemáticas. Los esfuerzos por desarrollar las competencias matemáticas van acompañados no sólo del conocimiento sustantivo de la Autora de la obra, sino también de una atención excepcional a la estética lingüística y visual de esta obra, el uso eficiente de las herramientas multimedia y un conocimiento confiable sobre el desarrollo cognitivo humano.

No es de extrañar, por tanto, que los trabajos de Małgorzata Makiewicz destinados al desarrollo de la cultura matemática generen desde hace años tanto interés científico y, más ampliamente, social. Este es el caso tanto del primer concurso internacional de fotografía "Matemáticas en la lente", creado por la Autora, como de sus propuestas presentadas en varias publicaciones para popularizar la cultura matemática. Despiertan el interés no sólo de los círculos académicos y entre personas fascinadas por las matemáticas, sino también, sobre todo, y esto es importante, entre profesores y padres que comprenden la importancia que tiene el desarrollo de competencias personales en este campo, desde el mismo comienzo de la niñez.

El libro "Math&Art. Mira, es matemática" demuestra que la profesora Małgorzata Makiewicz ha descubierto la llave que abre caminos desconocidos en el misterioso mundo de la aventura matemática. El viaje intelectual que propone la Autora mueve las mentes, enseña a mirar y a comprender. Es una fuente de experiencias extraordinarias y de fascinaciones matemáticas. También vale la pena enfatizar que la Autora revela un talento único en el uso de herramientas que apelan a muchos sentidos del lector, espectador y oyente. Esta polisensorialidad de la obra constituye su inmenso valor. Y no sólo por su originalidad, sino sobre todo porque apela al gusto de las personas que viven en los espacios entremezclados del mundo real y virtual, que viven en un periodo de rápido desarrollo de la inteligencia artificial, la biotecnología, la robótica y los ordenadores cuánticos.

Prof. Maciej Tanaś